

**AYT**



Soru Kalıpları ve Açıklamalı Çözümlerle

# İNTEGRAL

SORU BANKASI

Fatih TURGUT  
Kurbani KAYA  
Güven KURT

- ✓ Stratejik Soru Kalıpları
- ✓ Çözümlü Sorular
- ✓ Testler
- ✓ Soru Çözüm Videolu
- ✓ Soru Sayısı: 681



# İÇİNDEKİLER

<b>1. BÖLÜM: BELİRSİZ İNTEGRAL</b> .....	<b>6 - 41</b>
1. MODEL: Diferansiyel Kavramı .....	6
2. MODEL: Belirsiz İntegrale Giriş .....	8
3. MODEL: $f(x) = x^n$ Fonksiyonlarının İntegrali .....	10
4. MODEL: İntegral Özellikleri .....	12
5. MODEL: İntegral - Diferansiyel İlişkileri .....	14
6. MODEL: Çarpımlı - Bölümlü İntegraller .....	16
7. MODEL: İntegralden Fonksiyonu Çekelim .....	18
8. MODEL: Türevi Verilen Fonksiyonun İlk Hâlini Bulma .....	20
9. MODEL: Çarpım ve Bölüm İçeren Değişken Değişiklikleri .....	22
10. MODEL: Köklü İfade İçeren Değişken Değişiklikleri .....	24
<b>2. BÖLÜM: BELİRLİ İNTEGRAL</b> .....	<b>42 - 91</b>
1. MODEL: Belirli İntegrale Giriş .....	42
2. MODEL: Belirli İntegralin Özellikleri .....	44
3. MODEL: Belirli İntegrali Toplama ve Çıkarmaya Dağıtma .....	46
4. MODEL: Fonksiyonun Tek - Çift Olması Durumunda Belirli İntegrali Alma .....	48
5. MODEL: Belirli İntegralde Parçalama Özelliği .....	50
6. MODEL: Parçalı Fonksiyonların Belirli İntegrali .....	52
7. MODEL: Mutlak Değerli Fonksiyonların Belirli İntegrali .....	54
8. MODEL: Değişken Değişiklikli Belirli İntegraller .....	56
9. MODEL: Teorik Değişken Değişiklikli Belirli İntegraller .....	58
10. MODEL: $\int_a^b f(x)dx$ İntegralinin Sonucundan Yararlanarak $\int_c^d f(mx + n)dx$ İntegralinin Sonucunu Hesaplama .....	60

<b>3. BÖLÜM: İNTEGRALDE ALAN</b> .....	<b>92 - 152</b>
1. MODEL: Belirli İntegral ile Alan Hesaplama .....	92
2. MODEL: İki Fonksiyon Arasında Kalan Alan Hesaplama .....	94
3. MODEL: Birden Fazla Parçaların Alanları Toplamı .....	96
4. MODEL: Grafik ve Şekiller Yardımıyla İntegral Hesabı .....	98
5. MODEL: Bir Fonksiyon ile Tersinin Alanları Toplamı .....	100
6. MODEL: A YA 2A – A YA 3A... Pratik Yöntemi .....	102
7. MODEL: Parabol - Doğru ve Parabol - Parabol Arasındaki Alanın Pratik Yöntemi .....	104
8. MODEL: Alanları İlişkisi Verildiğinde Alan Hesaplamaları .....	106
9. MODEL: Fonksiyonun Türevini Kullanarak Alan Hesaplama .....	108
10. MODEL: Çemberli Alan Hesaplamaları .....	110
11. MODEL: İntegralin Fiziksel Yorumu ve İntegral Problemleri .....	112
12. MODEL: Riemann Toplamı .....	114

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ, ÖRNEKTİR.

# 1. BÖLÜM: BELİRSİZ İNTEGRAL

## 1. MODEL | DİFERANSİYEL KAVRAMI

### BİLGİ

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $x$  e göre türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x) \text{ olduğundan}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ olur.}$$

Burada  $dy$  ifadesine  $f(x)$  in diferansiyeli,  $dx$  ifadesine de diferansiyel çarpanı denir.

### ÖRNEKLER

1. a)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

b)  $g(u) = u^3 - 4$

c)  $h(m) = \frac{2m}{m+1}$

fonksiyonlarının diferansiyellerini bulunuz.

#### Açıklamalı Çözüm:

a)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx$  olduğuna göre,

$$d(f(x)) = (3x^2 - 8x) \cdot dx \text{ elde edilir.}$$

b)  $d(g(u)) = g'(u) \cdot d(u)$

$$= 3u^2 \cdot du$$

c)  $d(h(m)) = h'(m) \cdot dm$

$$= \frac{2 \cdot (m+1) - 1 \cdot (2m)}{(m+1)^2} \cdot dm$$

$$= \frac{2}{(m+1)^2} \cdot dm$$

2.  $d(x^3 + y^2 + x \cdot y)$  ifadesi

I.  $3x^2 \cdot dx$

II.  $(3x^2 + y) \cdot dx$

III.  $(2y + x) \cdot dy$

yukarıdaki ifadelerden hangileri olabilir?

#### Açıklamalı Çözüm:

$x$  e göre diferansiyel alınır

$$d(x^3 + y^2 + x \cdot y) = (3x^2 + y) \cdot dx$$

$y$  ye göre diferansiyel alınır

$$d(x^3 + y^2 + xy) = (2y + x) \cdot dy$$

elde edilir.

Buradan II ve III öncülleri doğrudur.

3.  $3x^2 + 5 = 2u^3 + u$

için aşağıda verilen eşitliklerden hangisi doğrudur?

A)  $6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot dx$

B)  $6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$

C)  $6x \cdot du = (6u^2 + 1) \cdot dx$

D)  $6x \cdot du = (6u^2 + 1) \cdot du$

E)  $(6x + 5) \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$

#### Açıklamalı Çözüm:

$$3x^2 + 5 = 2u^3 + u$$

eşitliğinin diferansiyelini alırsak,

$$d(3x^2 + 5) = d(2u^3 + u)$$

$$6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$$

elde edilir. Cevap B eşitliğidir.

4.  $d(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) = (3x^2 + ax + b)dx$

olduğuna göre,  $a + b$  toplamı kaçtır?

#### Açıklamalı Çözüm:

$$d(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) = (3x^2 + ax + b)dx$$

$$(3x^2 + 6x - 5) \cdot dx = (3x^2 + ax + b)dx$$

$$3x^2 + 6x - 5 = 3x^2 + ax + b$$

polinom eşitliğinden  $a = 6$ ,  $b = -5$  olup  $a + b = 1$  dir.

5.  $x^3 \cdot d\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

ifadesinin eşitini bulunuz.

#### Açıklamalı Çözüm:

$$x^3 \cdot d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x^3 \cdot \left(\frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$= x \cdot (f'(x) \cdot x - f(x)) \cdot dx$$

$$= [x^2 \cdot f'(x) - x \cdot f(x)] \cdot dx$$

elde edilir.



032E0192

1.  $d(x^2 - 3x + 5)$   
diferansiyelinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $(x^2 - 3)dx$       B)  $(2x - 5)dx$       C)  $(2x - 3)dx$   
D)  $(2x + 5)dx$       E)  $(x^2 - 3x + 5)dx$

2.  $\frac{d(x^3 - 2x^2 - 1)}{3x - 4}$   
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $3x^2$       B)  $xdx$       C)  $(x + 1)dx$   
D)  $(3x^2 - 1)dx$       E)  $(3x^2 - 4x)dx$

3.  $\frac{d(3x^4 - 2)}{d(x^3 + 1)}$   
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $12x^3dx$       B)  $12x^3$       C)  $3x$   
D)  $4x$       E)  $4xdx$

4.  $x^2 \cdot d\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$   
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $x^2 - 1$       B)  $(x^2 - 1)dx$       C)  $x^2dx$   
D)  $x^2 + 1$       E)  $(x^2 + 1)dx$

5.  $d(f(x)) = 4x^3dx - \frac{1}{x^2}dx$   
olduğuna göre,  $f'(-1)$  kaçtır?

- A) -5      B) -4      C) -3      D) 2      E) 3

6.  $y = 4x - 2t + 2$   
olduğuna göre,  
I.  $dy = 4dx$   
II.  $dy = -2dt$   
III.  $dt = 2dx$   
ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I      B) I ve II      C) I ve III  
D) II ve III      E) I, II ve III

7.  $d(x^2 - x + 3y^2 + 2)$   
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A)  $(2x - 1)dx$       B)  $(2 + 6y)dy$       C)  $(2x - 1)dy$   
D)  $(2x - 1 + 6y)dx$       E)  $6ydx$

8.  $d(f(x)) = (1 - 3x^2)dx$   
olduğuna göre,  $f(x)$  fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A)  $x - x^3 + 5$       B)  $x - x^3 + c$       C)  $x - x^3 + 1$   
D)  $2x - x^3 + 4$       E)  $x - x^3$

# 1. BÖLÜM: BELİRSİZ İNTEGRAL

## 2. MODEL | BELİRSİZ İNTEGRALE GİRİŞ



### BİLGİ

- Belirsiz integral, diferansiyeli bilinen bir fonksiyonun **ilk hâlinin** tespit edilmesi işlemidir.
- Diferansiyeli  $f(x)dx$  olan  $F(x)$  fonksiyonuna  $f(x)$  fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ile gösterilir.

Bu eşitlikte,

- $\int$  sembolüne integral işareti denir.
- $c$  ye integral sabiti denir.
- $f(x)$  e integrali alınan fonksiyon
- $F(x)$  e  $f(x)$  in ters türevi
- $F(x) + c$  yi bulma işlemine de belirsiz integral alma işlemi denir.

### ÖRNEKLER

1.  $\int 2x \cdot dx = x^2 + c$

eşitliği için aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur.

- $x^2 + c$  nin türevi  $2x$  tir.
- $x$  e göre türev alınmıştır.
- $2x$  in integrali  $x^2 + c$  dir.
- $c$  integral sabitidir.

#### Açıklamalı Çözüm:

Türevi belli olan bir fonksiyonu bulmak için yapılan işleme integral alma işlemi denir.

$$x^2, x^2 + 3, x^2 - 7, x^2 + \sqrt{3}, \dots$$

ifadelerine  $x$  e göre türevi  $2x$  tir. Sabitin türevi sıfır olduğu için  $2x$  in integrali  $x^2 + c$  dir. Burada  $c$  ye integral sabiti denir.

$$x^2 + c \xrightarrow{\text{türev}} 2x$$
$$\xleftarrow{\text{integral}}$$

Burada verilen öncüllerin hepsi de doğrudur.

2.  $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$   
integrali neye eşittir?

#### Açıklamalı Çözüm:

Türevi  $3x^2$  olan  $x^3$   
Türevi  $2x$  olan  $x^2$   
Türevi  $1$  olan  $x$   
olacağından dolayı,  
Türevi  $3x^2 + 2x + 1$  olan fonksiyonun ilk hâli  $x^3 + x^2 + x + c$  şeklindedir.  
O hâlde,  $\int (3x^2 + 2x + 1)dx = x^3 + x^2 + x + c$  elde edilir.

3.  $\int [f(x) + x \cdot f'(x)]dx$   
integralinin sonucunu bulunuz.

#### Açıklamalı Çözüm:

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  olduğundan

$$[x \cdot f(x)]' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) \text{ olur.}$$

Buradan türevi  $f(x) + x \cdot f'(x)$  olan fonksiyonun ilk hâli  $xf(x) + c$  şeklinde olmalıdır.

O hâlde,  $\int [f(x) + xf'(x)]dx = xf(x) + c$  elde edilir.

4.  $\int \left( \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \right) dx$

ifadesinin eşitini bulunuz.

#### Açıklamalı Çözüm:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

olduğundan,

$$\left[ \frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}$$

olur.

Buradan türevi

$$\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$$

olan fonksiyonun ilk hâli

$$\frac{f(x)}{x} + c$$

şeklinde olmalıdır.

O hâlde,

$$\int \left( \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \right) \cdot dx = \frac{f(x)}{x} + c$$

elde edilir.



1.  $\int dx + \int dy$   
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $x + y + c$       B)  $2x$       C)  $x^2 + y^2$   
D)  $x + y$       E)  $xy + c$

2.  $\int 2dx$   
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $\frac{x}{2} + c$       B)  $2x$       C)  $2x + c$   
D)  $x + c$       E)  $x^2 + c$

3. I.  $\int \sqrt{3}dx = \sqrt{3}x + c$

II.  $\int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + c$

III.  $\int (x^2 - 1)dx = 2x - 1 + c$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I      B) Yalnız III      C) I ve II  
D) I ve III      E) I, II ve III

4. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A)  $\int \pi dx = \pi x + c$       B)  $\int 3dy = 3y + c$   
C)  $\int ydx = yx + c$       D)  $\int mndx = mnx + c$   
E)  $\int 2xdy = x^2 + c$

5.  $\int (6 - 3\sqrt{2})dx$   
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A)  $6 - 3\sqrt{2}x + c$       B)  $cx$       C)  $6x - 3\sqrt{2}x + c$   
D)  $6x - 3\sqrt{2}x$       E)  $6 - 3\sqrt{2}x$

6.  $f(x) = \int (m^2 - 1)dx$   
Buna göre,  $f(3) - f(-1)$  farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $2m^2 - 2$       B)  $2m^2 - 4$       C)  $4m^2 - 2$   
D)  $4m^2 - 4$       E) 0

7. I.  $\int [f(x) + x \cdot f'(x)]dx = x \cdot f(x) + c$

II.  $\int \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{x}{f(x)} + c$

III.  $\int [f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)]dx = f(x) \cdot g(x) + c$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

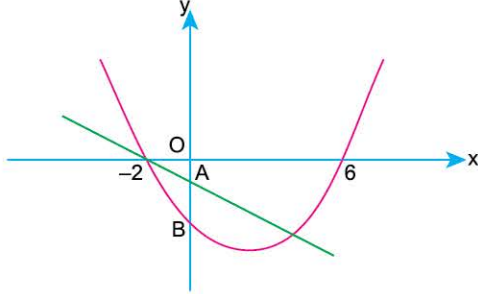
- A) Yalnız I      B) I ve II      C) I ve III  
D) II ve III      E) I, II ve III



1.  $c$  reel sayı olmak üzere,

$$\int f(x)dx = g(x) + c$$

eşitliğini sağlayan  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için; aşağıda  $f(-x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları grafikleri verilmiştir.



Buna göre,  $\frac{|OA|}{|AB|}$  oranı kaçtır?

- A) 1      B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{1}{4}$       E)  $\frac{1}{5}$

2.  $\int f(x)dx$ , belirsiz integralini değişken değiştirme yöntemiyle çözmek isteyen Melek,  $x+1 = u$  dönüşümü yaptığında

$\int \sqrt{u}$  du belirsiz integralini elde ediyor.

Numan, Melek'in elde ettiği integrali  $u = t^2$  dönüşümü yaparak,

$\int g(t)dt$  belirsiz integralini elde ediyor.

Buna göre,  $g(3) - g(1)$  farkı kaçtır?

- A) 10      B) 12      C) 14      D) 16      E) 18

3.  $P(x)$  polinomu için,

- $\text{der}(P(x)) \geq 2$
- Çift dereceli terimlerden oluşuyor.
- Başkatsayısı negatiftir.

bilgileri veriliyor.

Bir bilgisayar programına yukarıdaki şartlara uygun polinom yazılıyor. Program aşağıdaki işlemleri sırasıyla yapıyor.

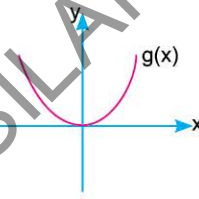
1)  $f(x) = \int P(x)dx$ , integral sabitini sıfır olacak şekilde  $f(x)$  fonksiyonunu buluyor.

2)  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  fonksiyonunu buluyor.

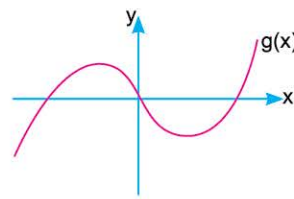
3)  $g(x)$  fonksiyonunun grafiğini çiziyor.

Buna göre, bilgisayarın çizdiği grafik aşağıdaki grafiklerden hangileri olabilir?

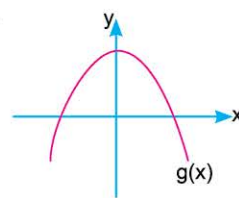
I.



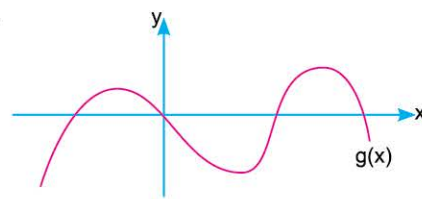
II.



III.



IV.

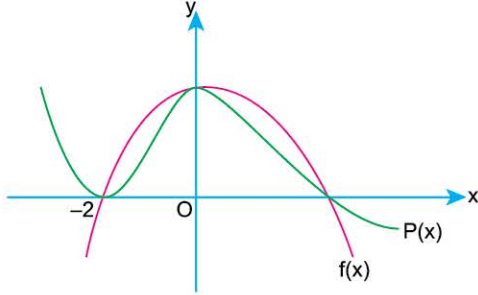


- A) I ve II      B) I ve III      C) I, II ve III  
D) Yalnız IV      E) Yalnız III





1. a ve b birer gerçel sayılardır. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde  $P(x) = -x^3 - x^2 + ax - b$  polinomunun grafiği verilmiştir.

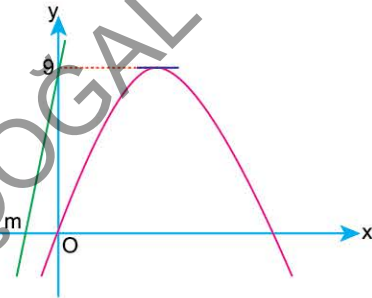


$y = f(x)$  parabolü,  $P(x)$  polinomunun eksenleri kestiği noktalardan geçmektedir.

Buna göre,  $\int f(x)dx$  integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $\frac{x^3}{3} - 6x + c$       B)  $x^3 + 12x + c$   
 C)  $x^3 - 12x + c$       D)  $-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 12x + c$   
 E)  $x^3 - x^2 + 12x + c$

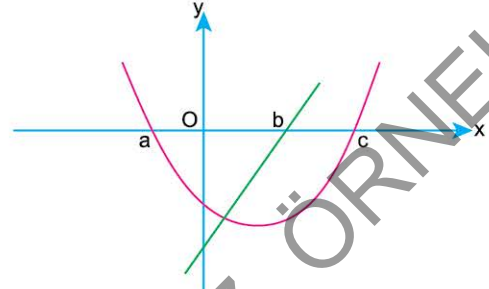
2. Aşağıda dik koordinat düzleminde  $y = f(-x)$  ve  $y = \int f(x)dx$  grafikleri verilmiştir.



Buna göre, m kaçtır?

- A) -3      B) -2      C) -5      D) -4      E) -9

3. Aşağıda dik koordinat düzleminde  $y = f(x)$  ve  $y = \int f(x)dx$  fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



a, b ve c, x eksenini kestiği noktalardır.

$a + c = 12$  olduğuna göre, b kaçtır?

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

4. Uygun şartlarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$g(x) = \int (x^3 f'(-x) - 3x^2 f(-x)) dx$$

$$f(-1) = g(1) = 3$$

$$f(2) = 5$$

olduğuna göre,  $g(-2)$  kaçtır?

- A) 2      B) 28      C) 34      D) 40      E) 46