TYT-AYT

KonuTik

Konu Özetli ve Açıklamalı Çözümlerle

FONKSİYONLAR VE PARABOL

SORU BANKASI

Kurbani KAYA
Güven KURT

- Stratejik Bilgiler
- Çözümlü Sorular
- Testler
- Soru Çözüm Videolu
- Soru Sayısı: 908

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM: FONKSİYON KAVRAMI VE TEMEL BİLGİLER ..... 6 - 67

1. MODEL: Fonksiyon Kavramı: Fonksiyon Makinesi 6
2. MODEL: Fonksiyonların Gösterimi 8
3. MODEL: Fonksiyonun Tanımı - 1 10
4. MODEL: Fonksiyonun Tanımı - 2 12
5. MODEL: Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi Bulma (Grafiksiz) 14
6. MODEL: Tanım Kümesi ve Görüntü Kümesi Bulma (Grafikli) 16
7. MODEL: Düşey Doğru Testi 18
8. MODEL: Fonksiyonda Değer Bulma - 1 20
9. MODEL: Fonksiyonda Değer Bulma - 2 22
10. MODEL: Fonksiyonda Değer Bulma - 3 24
11. MODEL: Fonksiyonları Birbiri Türünden Yazma 26
12. MODEL: Özel Kurallı Fonksiyonlar 28
13. MODEL: Fonksiyon Çeşitleri - 1 30
14. MODEL: Fonksiyon Çeşitleri - 2 32
15. MODEL: Fonksiyon Çeşitleri - 3 34
16. MODEL: Fonksiyon Çeşitleri - 4 36
17. MODEL: Fonksiyon Çeşitleri - 5 38
18. MODEL: Yatay Doğru Testi 40
19. MODEL: Fonksiyon Sayısı 42
20. MODEL: Fonksiyonlarda Aritmetik İşlemler 44
21. MODEL: Periyodik Fonksiyonlar 46

2. BÖLÜM: BİLEŞKE FONKSİYON - TERS FONKSİYON ..... 68 - 107

1. MODEL: Bileşke Fonksiyon Kuralını Yazma 68
2. MODEL: Bileşke Fonksiyonda Değer Bulma 70
3. MODEL: (fog)(x) Belli İken f(x) veya g(x) Bulma 72
4. MODEL: (fogoh)(x) 74
5. MODEL: Bir Fonksiyonun Tersinin Olması İçin Gerekli Şartlar 76
6. MODEL: Ters Fonksiyonda Değer Bulma (Ters Görüntü) 78
7. MODEL: 3 Adımda $f^{-1}(x)$ Bulma 80
8. MODEL: $f(x) = ax + b$ ile $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ Fonksiyonlarının Tersi 82
9. MODEL: Bileşke Fonksiyonun Tersini Bulma 84
10. MODEL: Bileşke Fonksiyon ile Ters Fonksiyon İlişkisi 86
11. MODEL: f(ax + b) Verildiğinde f(x) Bulma 88
12. MODEL: Grafikte Değer Bulma (Bileşke Değeri ve Ters Görüntü) 90

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

3. BÖLÜM: FONKSİYON GRAFİKLERİ ..... 108 - 159

1. MODEL: Grafikte Değer Bulma (f(x) Dışındaki Grafikler) 108
2. MODEL: Doğrusal Fonksiyon Grafikleri 110
3. MODEL: Parçalı Fonksiyon Grafikleri 112
4. MODEL: Doğrusal Fonksiyon Grafikleri ile İlgili Uygulamalar 114
5. MODEL: Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar 116
6. MODEL: Fonksiyonun Pozitif ve Negatif Olduğu Aralıklar 118
7. MODEL: Artan ve Azalan Fonksiyonlar 120
8. MODEL: Maksimum ve Minimum Noktalar 122
9. MODEL: Ortalama Değişim Hızı 124
10. MODEL: Tek ve Çift Fonksiyonların Grafiklerinin Simetri Özellikleri 126
11. MODEL: Fonksiyon Dönüşümleri - 1 128
12. MODEL: Fonksiyon Dönüşümleri - 2 130
13. MODEL: Fonksiyon Dönüşümleri - 3 132
14. MODEL: Mutlak Değer Fonksiyonu ve Grafiği 134
15. MODEL: Fonksiyonlarda Eşitsizlik 136

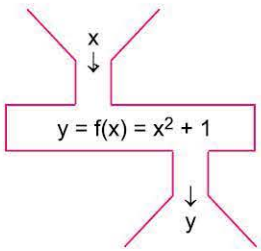
4. BÖLÜM: İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ ..... 160 - 208

1. MODEL: $f(x) = ax^2$ ve $f(x) = ax^2 + k$ Grafiklerinin Çizimi 160
2. MODEL: $f(x) = a(x - r)^2$ ve $f(x) = a(x - r)^2 + k$ Grafiklerinin Çizimi 162
3. MODEL: Genel Parabol Çizimi ve Tepe Noktasının Koordinatları 164
4. MODEL: Parabolün Eksenleri Kesme Durumu 166
5. MODEL: Tepe Noktası ile İlgili Uygulamalar - 1 168
6. MODEL: Tepe Noktası ile İlgili Uygulamalar - 2 170
7. MODEL: Tepe Noktası ile İlgili Uygulamalar - 3 172
8. MODEL: Grafiği Verilen Parabolün Denklemini Yazma - 1 174
9. MODEL: Grafiği Verilen Parabolün Denklemini Yazma - 2 176
10. MODEL: Parabol ile Doğrunun Birbirine Göre Durumu 178
11. MODEL: Parabol Uygulamaları - 1 (Grafik Soruları) 180
12. MODEL: Parabol Uygulamaları - 2 (Alan Soruları) 182
13. MODEL: Parabol Uygulamaları - 3 (Parabol ve Eşitsizlik) 184
14. MODEL: Parabol Uygulamaları - 4 (Parabol Problemleri) 186

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

BİLGİ

Fonksiyon kavramını anlayabilmek için aşağıdaki sayı makinesi örneğini inceleyelim.



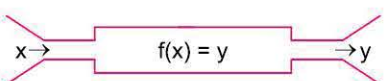
- Makineye giren x sayısına bir dizi işlem uygulanıyor ve x sayıları y sayısına dönüşmüş olarak makineden çıkıyor.
- Makinenin çalışma şekli: x sayısının karesini alıp 1 ekleyerek y sayısına dönüştürüyor.

Örneğin; makineye x = 3 sayısı girildiğinde karesi alınıp 1 eklenirse makineden çıkan y sayısı $y = 3^2 + 1 = 10$ olacaktır.

Bu durumda, f(3) = 10 olur.

ÖRNEKLER

1.



Yukarıda gösterilen f(x) sayı makinesinin çalışma prensibi "Her x sayısını bu sayının çarpımsal tersi ile kendisinin 2 katının toplamı olan y sayısına dönüştürüyor." biçimindedir.

Buna göre, f(5) kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

Öncelikle çarpımsal tersi kavramını hatırlayalım. Bir a sayısının çarpımsal tersi $\frac{1}{a}$ sayısıdır.

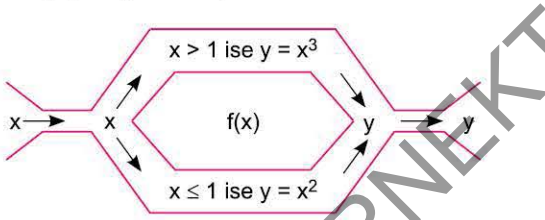
Problemde verilen sayı makinesi x sayısının çarpımsal tersi ile bu sayının 2 katını topluyormuş.

Dolayısıyla f(x)'in işleyişini $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ biçiminde gösterebiliriz.

O hâlde, $f(5) = \frac{1}{5} + 2 \cdot 5 \Rightarrow f(5) = \frac{51}{5}$ olacaktır.

Bu durumda, bu makineye giren 5 sayısı makineden $\frac{51}{5}$ sayısı olarak çıkar.

2. x gerçel sayılarına sayının 1'den büyük olup olmama durumuna göre ayrı ayrı dönüşüm uygulayan f(x) = y sayı makinesi aşağıda gösterilmiştir.



Buna göre, f(–2) + f(2) toplamı kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

Problemde verilen makine dikkatle incelenirse, aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

- x sayıları 1'den büyükse sayının küpü alınarak y sayısına dönüştürülüyor.
- x sayıları 1 veya 1'den küçükse sayının karesi alınarak y sayısına dönüştürülüyor.

Bu durumda f(x) makinesine girecek sayının 1'den büyük olup olmamasına göre iki ayrı dönüşüm uygulandığını anlıyoruz.

İlk önce f makinesine –2 sayısını atalım.

$-2 \leq 1$ olduğundan makine –2 sayısının karesini alarak y sayısına dönüştürecektir.

$f(-2) = (-2)^2 = 4 \Rightarrow f(-2) = 4$

Şimdi de f makinesine 2 sayısını atalım.

$2 > 1$ olduğundan makine 2 sayısının küpünü alarak y sayısına dönüştürecektir.

$f(2) = 2^3 = 8 \Rightarrow f(2) = 8$

O hâlde, f(–2) + f(2) toplamının sonucu 4 + 8 = 12 olacaktır.

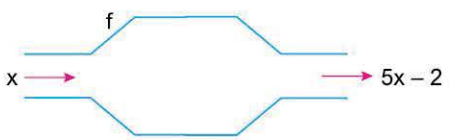
İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1. f fonksiyon makinesi, içerisine atılan elemanı 4 ile çarpıp çıkan sonuçtan 2 eksiltmektedir.

Buna göre, f fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x) = 4x B) f(x) = 4(x + 2) C) f(x) = 4x + 2
D) f(x) = 4(x – 2) E) f(x) = 4x – 2

2.

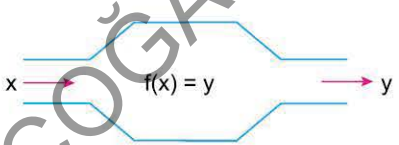


Yukarıda gösterilen f(x) sayı makinesinin çalışma prensibi şekilde gösterildiği gibidir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) f(3) = 13 B) f(–5) = –27 C) $f\left(\frac{1}{5}\right) = -2$
D) $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 2$ E) f(–1) = –7

3.



Yukarıda gösterilen f(x) sayı makinesinin çalışma prensibi "Her x sayısını bu sayının karesi ile karekökünün toplamı olan y sayısına dönüştürüyor." biçimindedir.

Buna göre, f(9) kaçtır?

A) 9 B) 12 C) 81 D) 84 E) 90

4. $x \xrightarrow{RCP} 3x - 2$

ifadesi RCP makinesinin her x değerini 3 katının 2 eksiğine dönüştürdüğünü göstermektedir.

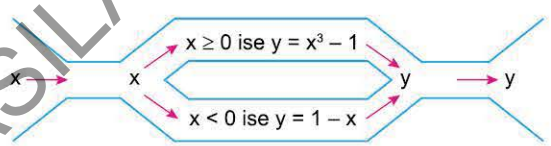
Buna göre,

$8 \xrightarrow{RCP} m + 5$

olduğuna göre, m değeri kaçtır?

A) 16 B) 17 C) 19 D) 21 E) 26

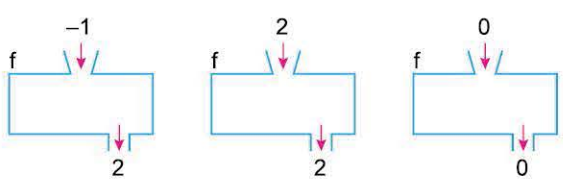
5. x gerçek sayılarına sayının 0'dan büyük olup olmama durumuna göre, ayrı ayrı dönüşüm uygulayan f(x) = y sayı makinesi aşağıda gösterilmiştir.



Buna göre, f(–3) + f(2) toplamı kaçtır?

A) –29 B) –24 C) 7 D) 11 E) 13

6.



Yukarıda gösterilen f(x) sayı makinesinin çalışma prensibi gösterildiği gibidir.

Buna göre, f fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $f(x) = x^2 + 1$ B) $f(x) = x^2 + x$
C) $f(x) = x^2 - 1$ D) $f(x) = x^2 - 2$
E) $f(x) = x^2 - x$

1-E	2-C	3-D	4-B	5-D	6-E

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1. A = {1, 2, 3, 4} ve B = {3, 4, 5, 6, 10, 11, 18} kümeleri veriliyor.

f: A → B, $f(x) = x^2 + 2$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun liste gösterimi

f = {(1, 3), (2, a), (3, b), (4, c)}

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) 30 B) 33 C) 34 D) 35 E) 37

2. f = {(1, 0), (2, 4), (3, –1), (4, –6), (5, 6)}

g = {(1, 2), (2, 8), (3, 7), (5, –2), (6, –3)}

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

I. f(2) – g(5) = 2

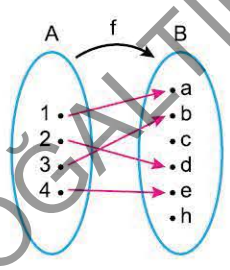
II. f(4) + g(2) = 2

III. f(1) + g(1) = 2

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) II ve III E) I, II ve III

3. A kümesinden B kümesine tanımlı bir f fonksiyonunun Venn şeması gösterimi aşağıda verilmiştir.



Buna göre, $\frac{f(1) + f(2)}{f(3) + f(4)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{a + e}{b + d}$ B) $\frac{a + d}{b + e}$ C) $\frac{a + b}{c + d}$ D) $\frac{d + e}{a + c}$ E) $\frac{a + c}{b + h}$

4. f(3) – f(1) = 4

eşitliğini sağlayan f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) f = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)}

B) f = {(1, –2), (2, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 6)}

C) f = {(1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 0), (5, 1)}

D) f = {(1, –3), (2, 3), (3, 1), (4, –2), (5, 0)}

E) f = {(1, 2), (2, –1), (3, –1), (4, 2), (5, 2)}

5. K kümesinden L kümesine tanımlı bir g fonksiyonunun liste gösterimi

g = {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (8, –1)}

şeklindedir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?

A) 3 ∈ K B) 8 ∈ K ∩ L C) 5 ∈ K D) 4 ∈ L E) 5 ∈ L

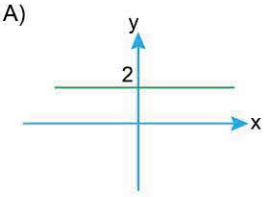
6. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu

f(x) = 2x

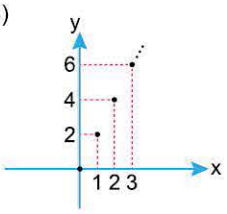
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

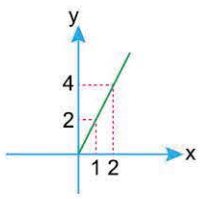
A)



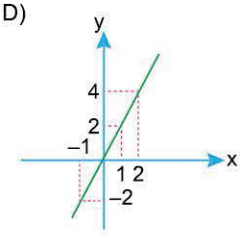
B)



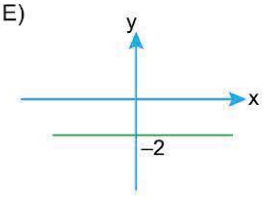
C)



D)



E)



1-D	2-D	3-B	4-D	5-E	6-D

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

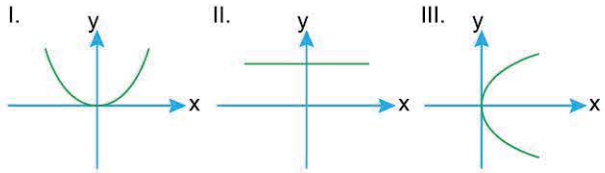
BİLGİ

Grafiği verilen y = f(x) bağıntısının fonksiyon olup olmadığını belirlemek için, tanım kümesindeki her bir noktadan x– eksenine dik doğrular çizilir. Bu doğruların her biri grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa verilen grafik bir fonksiyon grafiğidir. Bu işleme düşey doğru testi denir.

- Başka bir ifadeyle, düşey doğru testinde çizilen doğrular grafiği hep ve tek kesiyorsa grafik bir fonksiyona aittir.

ÖRNEKLER

1. I. II. III.

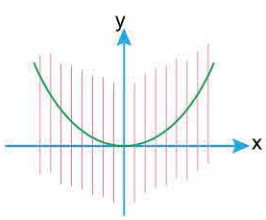


Yukarıda verilen grafiklerden hangileri f: R → R, y = f(x) biçiminde bir fonksiyon grafiğidir?

Açıklamalı Çözüm:

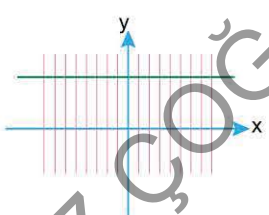
Verilen grafiklere ayrı ayrı düşey doğru testi uygulayalım.

I.



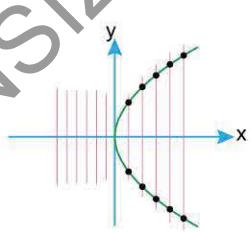
x-ekseni üzerindeki her noktadan çizdiğimiz dik çizgilerin (kırmızı çizgiler) tamamı grafiği kesiyor. Ayrıca çizgiler grafiği yalnızca bir noktada kesiyor. Bu durumda I. öncüldeki grafik fonksiyon grafiğidir.

II.



I. öncüldeki gibi yandaki grafikte de kırmızı çizgiler grafiği hep ve tek noktada kesiyor. O hâlde II. öncüldeki grafik y = f(x) biçiminde bir fonksiyon grafiğidir.

III.

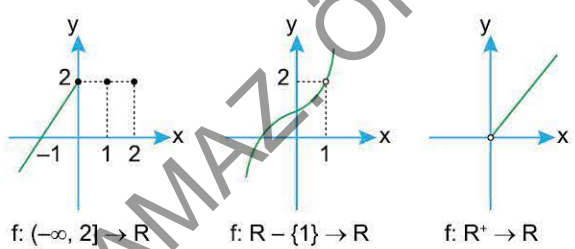


Yandaki şekilde görüldüğü gibi x-ekseninin negatif tarafındaki kırmızı çizgiler grafiği hiçbir noktada kesmiyor. Bunun anlamı şudur: Tanım kümesinde boşta eleman kalıyor.

Ayrıca, x-ekseninin pozitif tarafındaki kırmızı çizgiler grafiği iki farklı noktada kesiyor. Bunun anlamı şudur: Tanım kümesindeki bir eleman değer kümesinde birden fazla elemanla eşleşiyor.

Bu durumda, düşey doğru testi için çizilen çizgilerden grafiği kesmeyenler olduğundan ve grafiği kesenler iki farklı noktada kestiğinden III. öncüldeki grafik y = f(x) biçiminde bir fonksiyona ait olamaz.

2.

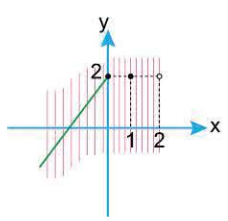


Yukarıda verilen grafiklerden hangileri y = f(x) biçiminde bir fonksiyon grafiğidir?

Açıklamalı Çözüm:

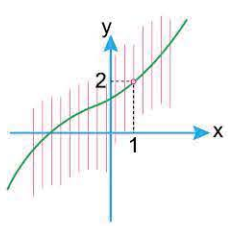
Düşey doğru testi fonksiyonun tanım kümesindeki noktalar için uygulanır. Dikkat edilirse verilen fonksiyonların tanım kümeleri birbirinden farklıdır. Örneğin; I numaralı grafik için (–∞, 2] aralığındaki tüm noktalar için düşey doğru testi uygularken II numaralı grafikte R - {1} kümesinde uygulayacağız.

I.



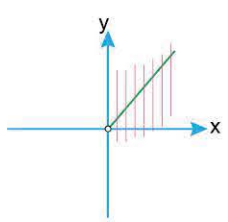
Kırmızı çizgileri (–∞, 2] aralığındaki tüm noktalar için çizdik. Ancak (0, 1) ile (1, 2) aralıklarındaki çizgiler grafiği kesmedi. Bu durumda I numaralı grafik bir fonksiyon grafiği olamaz.

II.



Kırmızı çizgileri x = 1 hariç tüm x gerçel sayıları için çizdik. (Çünkü tanım kümesi R – {1} verilmişti.) Ve çizdiğimiz tüm çizgiler grafiği tek noktada kestiğinden II numaralı grafik bir fonksiyon grafiğidir.

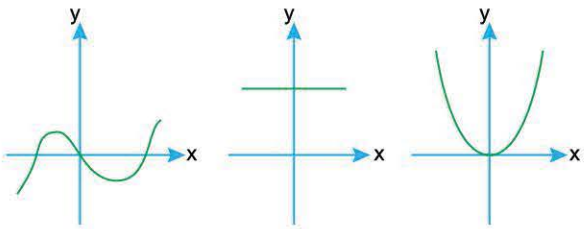
III.



Kırmızı çizgileri x ekseninin pozitif tarafında çizdik. (Çünkü tanım kümesi R^+ verilmişti.) Ve çizdiğimiz tüm çizgiler grafiği tek noktada kestiğinden III numaralı grafik bir fonksiyon grafiğidir.

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1.

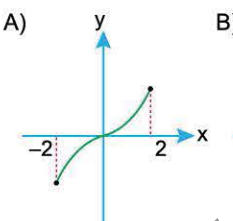


Yukarıda verilen grafiklerden hangileri f: R → R y = f(x) biçiminde bir fonksiyon grafiğidir?

A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

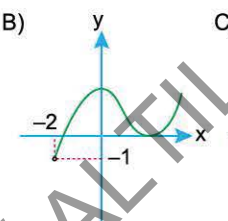
2. **Aşağıda grafiği verilen bağıntıların hangisi bir fonksiyon belirtir?**

A)



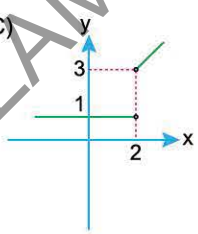
f: R → R

B)



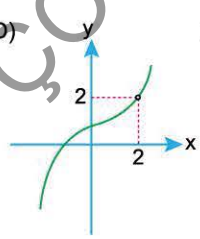
g: [–2, ∞) → R

C)



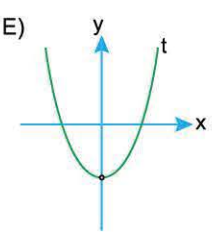
h: R → R

D)



k: R → R

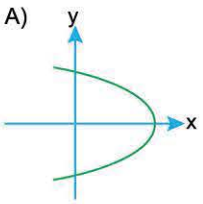
E)



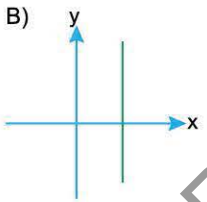
t: R – {0} → (R)

3. **Aşağıdaki grafiklerden hangisi R → R'ye bir fonksiyondur?**

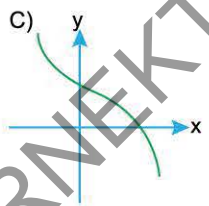
A)



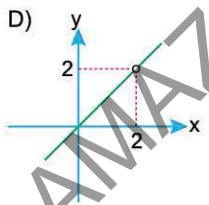
B)



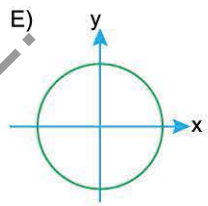
C)



D)

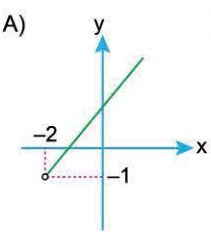


E)



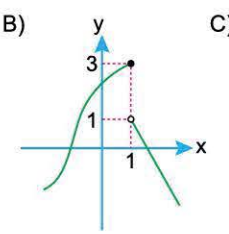
4. **Aşağıdaki grafiklerden hangisi belirtilen tanım aralığında fonksiyon belirtmez?**

A)



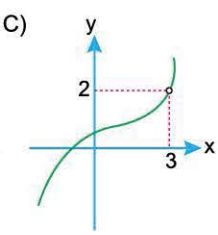
f: (–2, ∞) → R

B)



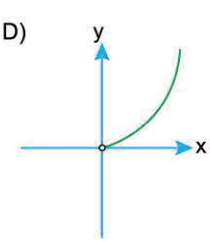
f: R → R

C)



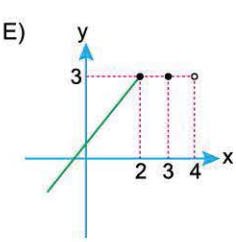
f: R – {3} → R

D)



f: R⁺ → R

E)



f: (–∞, 4] → R

1-E	2-E	3-C	4-E

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

BİLGİ

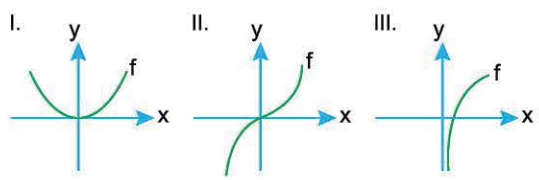
Grafiği verilen bir f(x) fonksiyonunun bire bir veya örten olup olmadığını belirlemek için değer kümesindeki her bir noktadan y-eksenine dik (x-eksenine paralel) doğrular çizilir. Çizilen doğrular;

- grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire birdir.
- grafiği en az bir noktada kesiyorsa fonksiyon örtendir.

Yapılan bu işleme yatay doğru testi denir.

ÖRNEKLER

1.



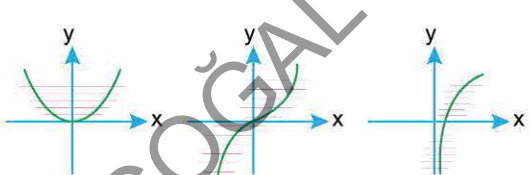
Yukarıda verilen y = f(x) biçimindeki fonksiyon grafiklerinden hangileri tanımlı olduğu aralıkta bire birdir?

Açıklamalı Çözüm:

İlk önce verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulalım.

- I. öncüldeki f fonksiyonu $R \to R^+ \cup \{0\}$ biçiminde tanımlanmıştır.
- II. öncüldeki f fonksiyonu $R \to R$ biçiminde tanımlanmıştır.
- III. öncüldeki f fonksiyonu ise $R^+ \to R$ biçiminde tanımlanmıştır.

Şimdi ise fonksiyonların değer kümelerindeki her bir noktadan y-eksenine dik (x-eksenine paralel) doğrular çizelim.

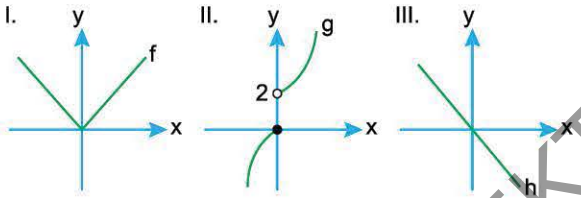


Yatay doğru testi için çizdiğimiz kırmızı çizgiler grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa o fonksiyon bire birdir.

Bu durumda;

- I numaralı grafikte kırmızı çizgiler grafiği iki farklı noktada kestiğinden bu fonksiyon bire bir değildir.
- II ve III numaralı grafiklerde kırmızı çizgiler grafiği yalnız bir noktada kestiği için bu fonksiyonlar bire birdir.

2.

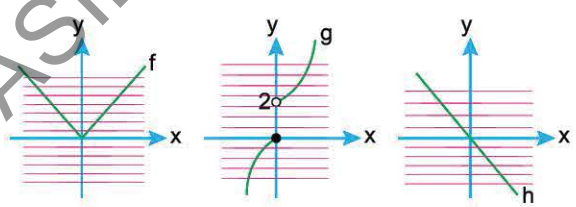


Yukarıda verilen f, g ve h fonksiyonlarından hangileri R'den R'ye örten bir fonksiyondur?

Açıklamalı Çözüm:

Bir fonksiyonun R'den R'ye örten olması için değer kümesi olan R (gerçel sayılar) kümesindeki her bir noktadan y-eksenine dik doğrular çizildiğinde bu doğruların her birinin grafiği en az bir noktada kesiyor olması gerekiyor.

f, g ve h fonksiyonlarının grafiklerinde y-eksenine dik doğrular çizelim.



- f fonksiyonunun grafiğinde y-ekseninin negatif bölgesindeki kırmızı çizgiler boşta kaldığı için (grafiği kesmiyor) f fonksiyonu R'den R'ye örten değildir.
- g fonksiyonunun grafiğinde y-ekseninin (0, 2] aralığındaki kırmızı çizgiler boşta kaldığı için g fonksiyonu R'den R'ye örten değildir.
- h fonksiyonunun grafiğinde y-ekseninin tamamı için çizilen kırmızı çizgiler grafiği kestiğinden dolayı h fonksiyonu R'den R'ye örtendir.

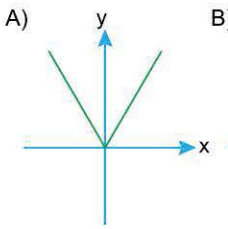
NOT

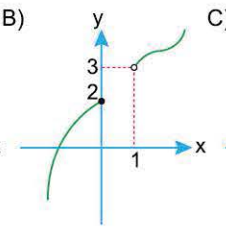
Yatay doğru testinde çizilen doğruların,

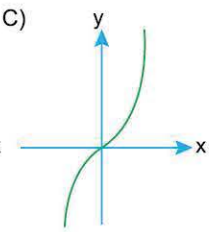
- Grafiği yalnız bir noktada kesiyor olmasının anlamı şudur: Tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirinden farklıdır.
- Grafiği en az bir noktada kesiyor olmasının anlamı ise şudur: Değer kümesinde boşta eleman kalmıyor.

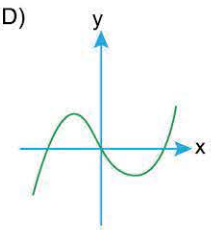
İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

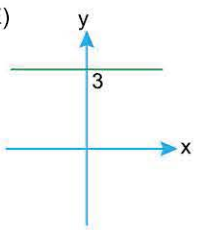
1. **Aşağıdakilerden hangisi R'den R'ye tanımlı bire bir fonksiyon grafiği olabilir?**

A) 

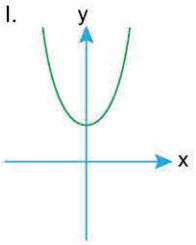
B) 

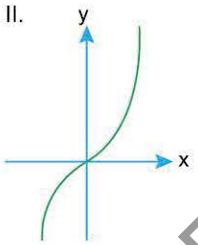
C) 

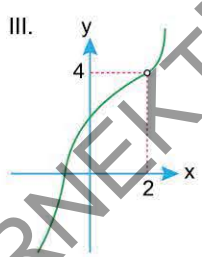
D) 

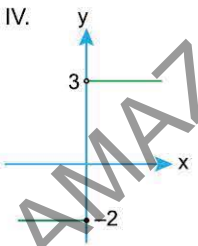
E) 

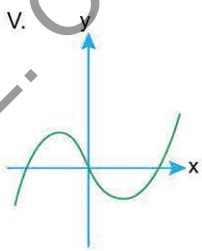
Aşağıda, gerçek sayılardan gerçek sayılar kümesine tanımlı olan fonksiyon grafikleri verilmiştir.

I. 

II. 

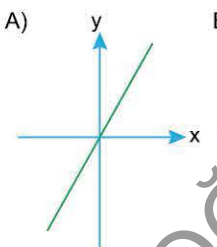
III. 

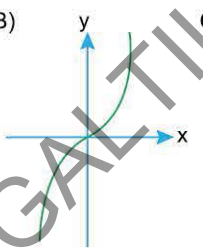
IV. 

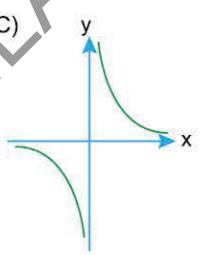
V. 

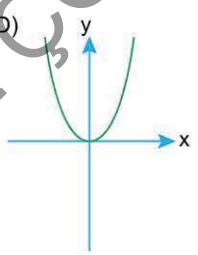
Buna göre, 3 ve 4. soruları yukarıdaki grafiklere göre cevaplayınız.

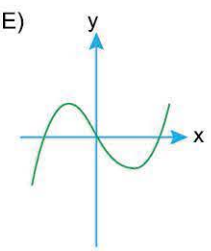
2. **Aşağıdakilerden hangisi R'den R'ye tanımlı hem bire bir olmayan hem örten olmayan bir fonksiyon grafiğidir?**

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

3. **Gerçek sayılarda tanımlı yukarıdaki grafiklerden hangileri bire bir fonksiyona aittir?**

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) II ve III E) II, III ve V

4. **Gerçek sayılarda tanımlı yukarıdaki grafiklerden hangileri örten bir fonksiyona aittir?**

A) Yalnız II B) Yalnız V C) I, II ve V
D) II ve V E) II, IV ve V

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1-C	2-D	3-B	4-D

BİLGİ

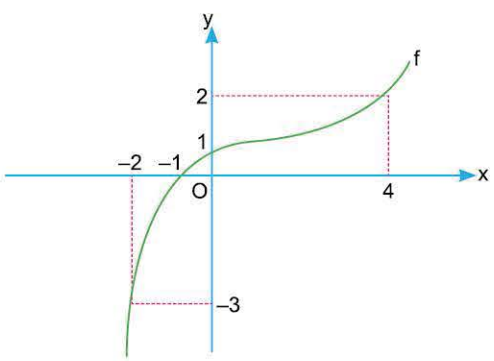
Bileşke fonksiyon veya ters fonksiyon grafiklerinde görüntü bulmak için,

- $(fog)(x) = f[g(x)]$
- $f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$

kurallarını kullanabiliriz.

ÖRNEKLER

1. f(x) = y fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



g(x) = x + 3 olduğuna göre, (fog)(1) + (fof)(–1) toplamının sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

Önce (fog)(1) değerini bulalım.

$f[\underbrace{g(1)}_{4}] = f[4]$ ... $(g(1) = 1 + 3 = 4)$

f fonksiyonunun grafiği (4, 2) noktasından geçtiğine göre, f(4) = 2 olur.

O hâlde, (fog)(1) = 2 olarak bulunur.

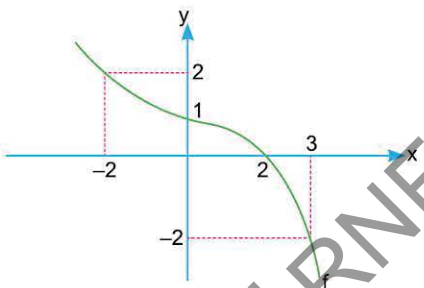
Şimdi ise (fof)(–1) değerini bulalım.

- f fonksiyonunun grafiği (–1, 0) noktasından geçtiğine göre, f(–1) = 0 olur.
- f fonksiyonunun grafiği (0, 1) noktasından geçtiğine göre, f(0) = 1 olur.

$(fof)(-1) = f[\underbrace{f(-1)}_{0}] = f(0) = 1$

Bu durumda (fog)(1) + (fof)(–1) toplamının sonucu 2 + 1 = 3 olacaktır.

2. Aşağıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $\frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(1)}{f^{-1}(0)}$ işleminin sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

f fonksiyonunun grafiği,

- (–2, 2) noktasından geçtiğine göre, f(–2) = 2 olur. Bu durumda $f^{-1}(2) = -2$ bulunur.
- (0, 1) noktasından geçtiğine göre, f(0) = 1 olup $f^{-1}(1) = 0$ bulunur.
- (2, 0) noktasından geçtiğine göre, f(2) = 0 olup $f^{-1}(0) = 2$ bulunur.

O hâlde, $\frac{f^{-1}(2) + f^{-1}(1)}{f^{-1}(0)} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$ olacaktır.

NOT

Yukarıdaki grafikte $f^{-1}(2)$ değerini bulmanın iki yolu vardır.

1. Yol

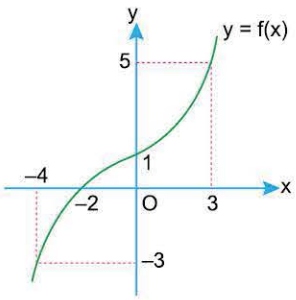
$f^{-1}(y) = x$ olduğundan y ekseninde "2" yi bulup y = 2 doğrusunun grafiği hangi noktada kestiğine bakılır. Bu noktanın apsisi $f^{-1}(2)$ değeridir.

2. Yol

f fonksiyonunun grafiği (–2, 2) noktasından geçtiğine göre, f(–2) = 2 olur. Bu durumda $f^{-1}(2) = -2$ bulunur.

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1.

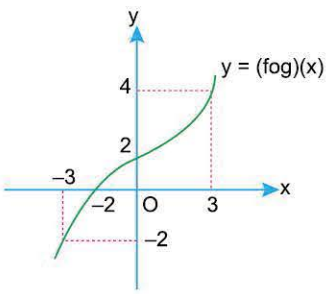


Yanda gerçek sayılarda tanımlı bire bir ve örten olan y = f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f(-4) = -3$ B) $f^{-1}(0) = -2$ C) $f^{-1}(1) = 0$
D) $f^{-1}(5) = 3$ E) $f(3) = 0$

2.

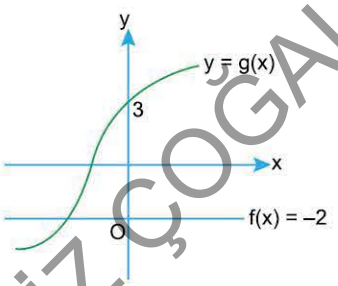


Yanda y = (fog)(x) bileşke fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.

f(x) = 3x + 1 olduğuna göre, g(3) kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 1 D) 2 E) 4

3.

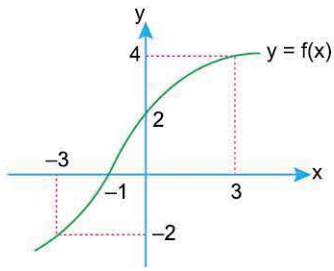


Yanda y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.

Buna göre, $\frac{f(4) + g^{-1}(3)}{(fog)(2)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

4.



Yanda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

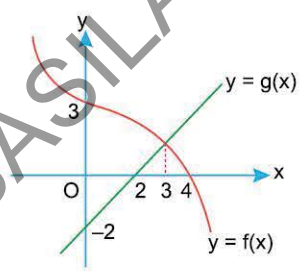
Buna göre,

$$\frac{(fof)(-1) + f^{-1}(-2)}{f^{-1}(0) + f^{-1}(4)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) –2 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

5.



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

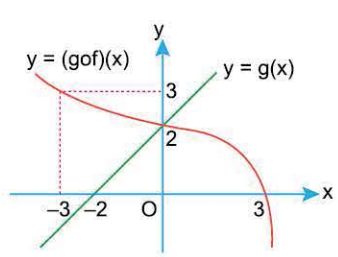
Buna göre,

$$\frac{f^{-1}(0) + g^{-1}(3)}{f^{-1}(1)}$$

ifadesinin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) 3

6.



Yandaki şekilde (gof) ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, (gof)(–3) + f(3) toplamı kaçtır?

A) –2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

1-E	2-C	3-D	4-C	5-E	6-B

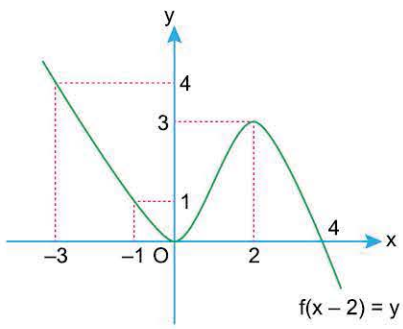
İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

BİLGİ

Bir f fonksiyonunun y = f(x) dışındaki grafiği verilmişse f(a) değerini bulmak için f'nin içini a yapan x değeri bulunur ve bu x değeri için grafikte görüntü araştırılır.

ÖRNEKLER

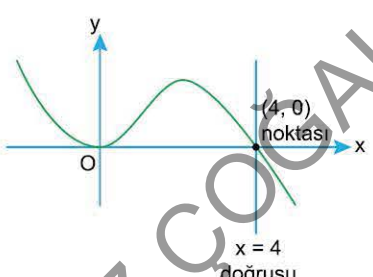
1. y = f(x – 2) fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.



Buna göre, f(2) + f(–3) toplamının sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

f fonksiyonu için verilen grafiğin y = f(x) fonksiyonuna ait olmadığına çok dikkat etmeliyiz. Aksi takdirde yanlışlıkla f(2) değerini 3 buluruz. Oysa grafik y = f(x – 2) fonksiyonuna ait, f(2) değerini bulmak için f'nin içini 2 yapan x sayısını bulmalıyız.



x – 2 = 2 ⇒ x = 4 olur.

O hâlde x-ekseninde x = 4 doğrusunun grafiği hangi noktada kestiğine bakmalıyız.

(4, 0) ∈ f(x – 2) olduğuna göre, f(2) = 0 olur.

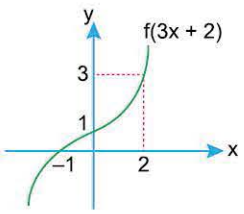
Benzer şekilde y = f(x – 2) grafiğinde f(–3) değeri için

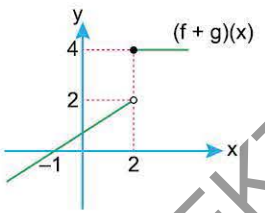
x – 2 = –3 ⇒ x = –1 olduğundan x-ekseninde –1 sayısını bulup x = –1 için grafikte görüntü aramalıyız.

(–1, 1) ∈ f(x – 2) olduğundan f(–3) = 1 olur.

Bu durumda f(2) + f(–3) toplamının sonucu 0 + 1 = 1 olacaktır.

2.





Yukarıda y = f(3x + 2) ve y = (f + g)(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, g(2) değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

(f + g)(x) fonksiyonunun grafiğinde (2, 2) ve (2, 4) noktalarına dikkat edelim.

(2, 2) noktası içi boş, (2, 4) noktası içi dolu gösterilmiş. Bunun anlamı; (2, 4) noktası grafik üzerinde iken (2, 2) noktası grafik üzerinde değildir.

O hâlde (f + g)(2) = 4 olur. [(2, 4) ∈ y = (f + g)(x)]

f(3x + 2) fonksiyonunda f'nin içini 2 yapan x değerine bakalım.

3x + 2 = 2 ⇒ x = 0 olur.

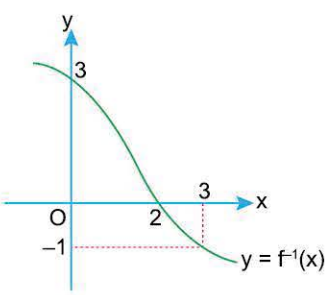
O hâlde f(3x + 2) grafiğinin x = 0 apsisli noktasını bulmalıyız.

(0, 1) ∈ f(3x + 2) ⇒ f(2) = 1 olur.

(f + g)(2) = 4 bulmuştuk. f(2) + g(2) = 4

eşitliğinde f(2) yerine 1 yazılırsa g(2) = 3 bulunur.

3. Yandaki şekilde f fonksiyonunun tersi olan f^{-1} fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$f^{-1}(3) + f(3)$

toplamının sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

$y = f^{-1}(x)$ grafiğinde $f^{-1}(3)$ ve f(3) değerlerini doğru bulmak için grafik üzerinde koordinatları bilinen noktalara tek tek bakalım. (0, 3), (2, 0) ve (3, –1) noktaları grafik üzerinde oldukları için bu noktaların apsis ve ordinat değerlerini $y = f^{-1}(x)$ eşitliğinde yerine yazalım.

(0, 3) ∈ $y = f^{-1}(x) \Rightarrow 3 = f^{-1}(0) \Rightarrow f(3) = 0$ olur.

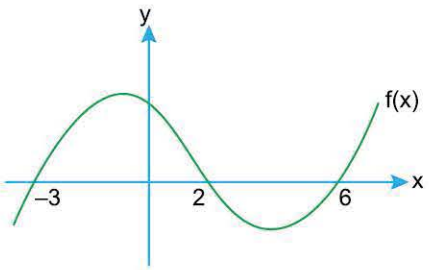
(2, 0) ∈ $y = f^{-1}(x) \Rightarrow 0 = f^{-1}(2) \Rightarrow f(0) = 2$ olur.

(3, –1) ∈ $y = f^{-1}(x) \Rightarrow -1 = f^{-1}(3) \Rightarrow f(-1) = 3$ olur.

O hâlde, $f^{-1}(3) + f(3)$ toplamının sonucu –1 + 0 = –1 olacaktır.

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

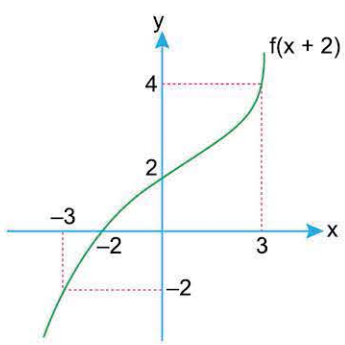
1.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, f(x – 2) = 0 denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) –2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 11

2.

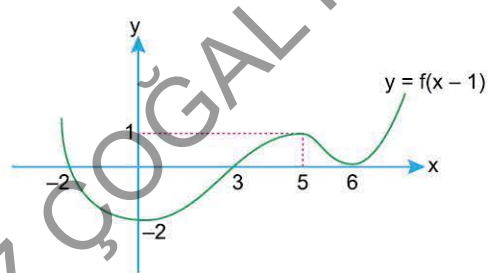


Şekildeki grafik f(x + 2) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, f(5) + f(2) + f(–1) toplamı kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

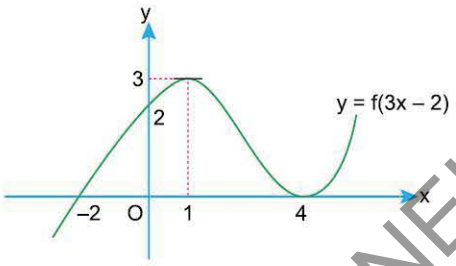
3.



Şekilde grafik y = f(x – 1) fonksiyonuna aittir.
Buna göre, f(–3) + f(–1) + f(4) + f(5) toplamı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

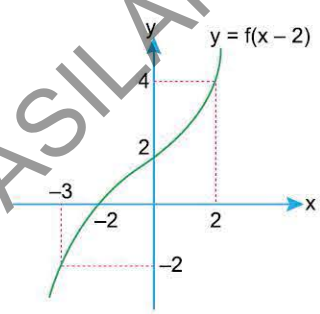
4.



Şekildeki grafik y = f(3x – 2) fonksiyonuna aittir.
Buna göre, $\frac{f(-8)-f(1)}{f(-2)+f(10)}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

5.

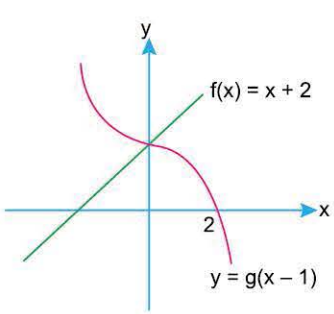


Şekildeki grafik y = f(x – 2) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, (fof)(–5) kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

6.



Yanda f(x) = x + 2 doğrusu ile y = g(x – 1) eğrisi verilmiştir.

Buna göre, $g(1) + g^{-1}(2)$ kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

1-E	2-D	3-B	4-A	5-C	6-A

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

BİLGİ

Bir f(x) fonksiyonunun grafiği y-ekseninde;

- k birim yukarı ötelendiğinde f(x) + k fonksiyonunun grafiği,
- k birim aşağı ötelendiğinde f(x) – k fonksiyonunun grafiği

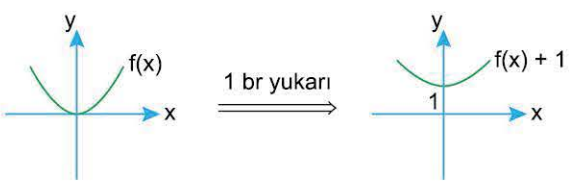
elde edilir.

ÖRNEK

1. **$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini kullanarak f(x) + 1 ve f(x) – 4 fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.**

Açıklamalı Çözüm:

- f(x) + 1 fonksiyonunun grafiğini çizmek için $f(x) = x^2$ grafiğini çizip bu grafiği y-ekseninde 1 birim yukarı ötelemeliyiz.



- f(x) – 4 fonksiyonunun grafiğini çizmek için $f(x) = x^2$ grafiğini çizip bu grafiği y-ekseninde 4 birim aşağı ötelemeliyiz.

A ve B noktalarını bulmak gerektiğinde f(x) – 4 yani $x^2 – 4$ fonksiyonunun köklerini bulmamız yeterli olacaktır.

$x^2 – 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = –2$ olur.

O hâlde B(2, 0) ve A(–2, 0) olarak bulunur.

BİLGİ

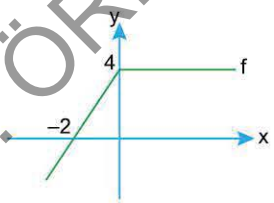
Bir f(x) fonksiyonunun grafiği x-ekseninde;

- k birim sağa ötelendiğinde f(x – k) fonksiyonunun grafiği,
- k birim sola ötelendiğinde ise f(x + k) fonksiyonunun grafiği

elde edilir.

ÖRNEK

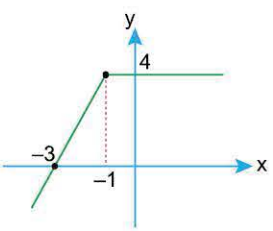
1. Yandaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f(x + 1) ve f(x – 3) fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

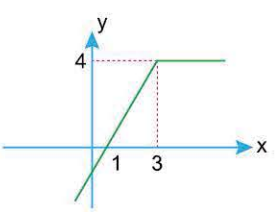
Açıklamalı Çözüm:

- f(x + 1) fonksiyonunun grafiğini çizmek için f(x) fonksiyonunun grafiğini x-ekseninde 1 birim sola ötelemeliyiz. (Şekil 1)



Şekil 1

- f(x – 3) fonksiyonunun grafiğini çizmek için f(x) fonksiyonunun grafiğini x-ekseninde 3 birim sağa ötelemeliyiz. (Şekil 2)



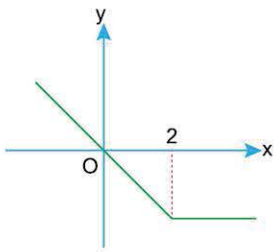
Şekil 2

NOT

Fonksiyon grafiklerine öteleme uygulanırken grafiğin şeklinin değişmediğine dikkat ediniz.

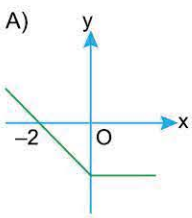
İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

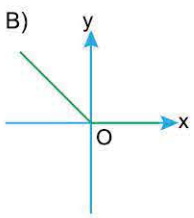
1.

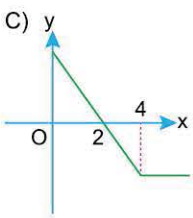


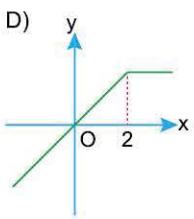
y = f(x) fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

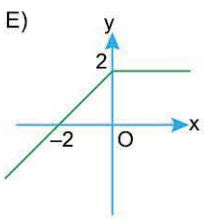
Buna göre, f(x – 2) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


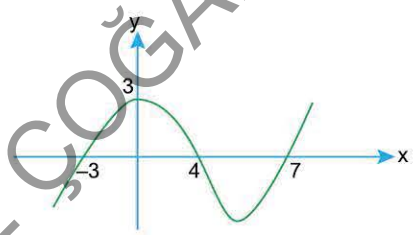
B)


C)


D)


E)


2. Aşağıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Buna göre, y = f(x + 2) fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisi toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

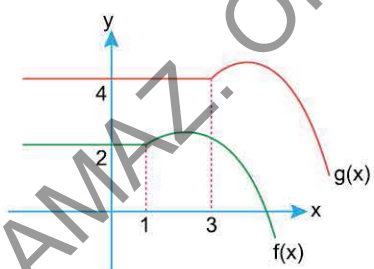
3. $f(x) = x^2 + 2x + 8$

fonksiyonunun grafiği a birim sağa ve b birim aşağı doğru ötelenerek $g(x) = x^2 – 4x + 8$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4.

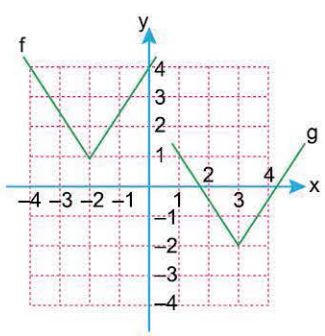


f: R → R fonksiyonu ötelenerek g(x) fonksiyonu elde ediliyor.

Buna göre, g(x) fonksiyonunun f(x) cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x – 2) + 2 B) f(x – 1) + 2 C) f(x + 2) + 1
D) f(x – 2) + 1 E) f(x + 2) + 2

5. Aşağıda, gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre, g(x) fonksiyonunun f(x) türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x – 3) – 3 B) f(x – 5) – 3 C) f(x + 5) – 3
D) f(x + 5) – 2 E) f(x – 5) + 3

1-C **2-B** **3-B** **4-A** **5-B**

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

BİLGİ

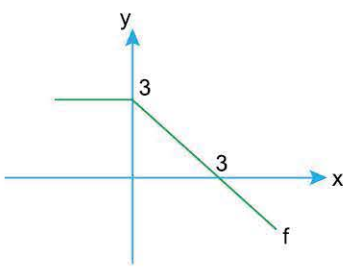
Bir f(x) fonksiyonunun grafiğinin;

- x-eksenine göre, simetriği alındığında –f(x) fonksiyonunun grafiği,
- y-eksenine göre simetriği alındığında f(–x) fonksiyonunun grafiği

elde edilir.

ÖRNEKLER

1. Yandaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

a) f(–x)

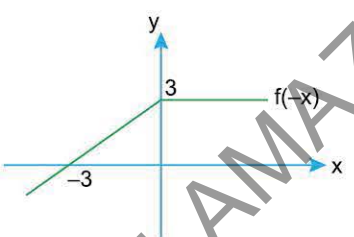
b) –f(x)

c) –f(–x)

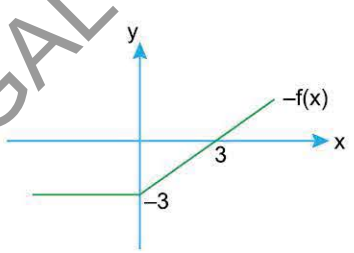
fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Açıklamalı Çözüm:

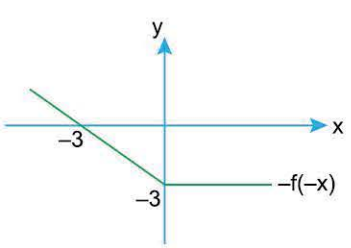
a) y-eksenine göre simetri alınırken y-eksenini ayna gibi düşünüp grafiğin yansımasını aldığımızı hatırlayalım. O hâlde f(–x) fonksiyonunu grafiği (yani f(x)'in y eksenine göre yansıması) yandaki gibi olacaktır.



b) –f(x) fonksiyonunun grafiği (yani f(x)'in x eksenine göre yansıması) yandaki gibidir.

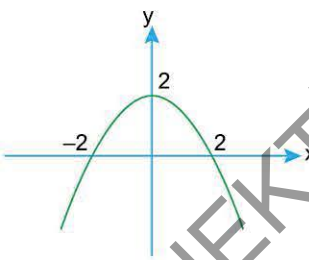


c) –f(–x) fonksiyonunun grafiği için f(x) fonksiyonunun önce y-eksenine göre sonra x-eksenine göre yansıması alınır.



2. Yukarıdaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, –2f(x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



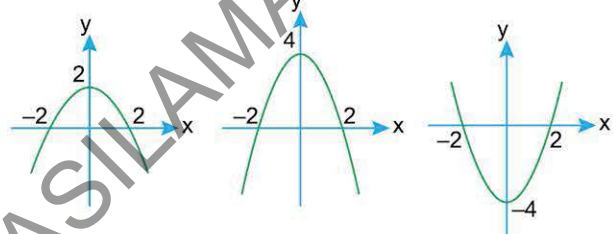
Açıklamalı Çözüm:

–2f(x) fonksiyonunun grafiğini iki aşamada çizebiliriz:

1. aşama: 2f(x) grafiği çizilir. (y'ler 2 katına çıkar.)

2. aşama: –2f(x) grafiği çizilir. (2f(x)'in x eksenine göre yansıması alınır.)

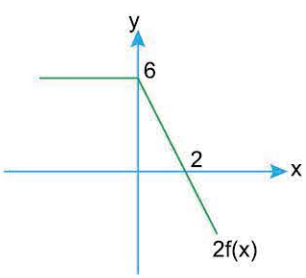
1. aşamada f(x) değerlerini (y değerlerini) 2 katına çıkardıktan sonra elde ettiğimiz grafiğin 2. aşamada x-eksenine göre yansımasını alacağız.



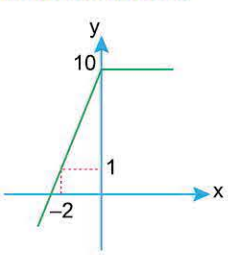
f(x) grafiği | 2f(x) grafiği (1. aşama) | –2f(x) grafiği (2. aşama)

3. Yukarıdaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, 3f(–x) + 1 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Açıklamalı Çözüm:



3f(–x) + 1 grafiği

2f(x) grafiğinden 3f(–x) + 1 grafiğine ulaşabilmek için aşağıdaki aşamaları takip edelim.

1. aşama: 2f(x) grafiğindeki y değerlerini 2'ye bölerek f(x) grafiğini elde edelim.

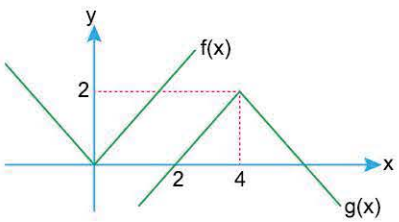
2. aşama: f(x) grafiğinin y-eksenine göre simetriği alarak f(–x) grafiğini elde edelim.

3. aşama: f(–x) grafiğindeki y değerlerini 3 ile çarparak 3f(–x) grafiğini elde edelim.

4. aşama: 3f(–x) grafiğini y-ekseninde 1 birim yukarı öteleyerek 3f(–x) + 1 grafiğini elde edelim.

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1.

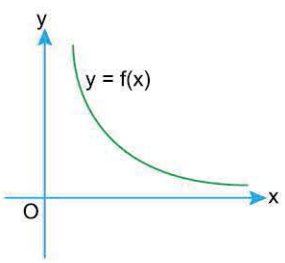


Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiğine göre dönüşümler uygulanarak y = g(x) fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –f(x – 4) – 2 B) –f(x – 3) + 2 C) –f(x – 4) + 2
D) –f(x + 4) + 2 E) –f(x + 4) – 2

2.



Yanda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

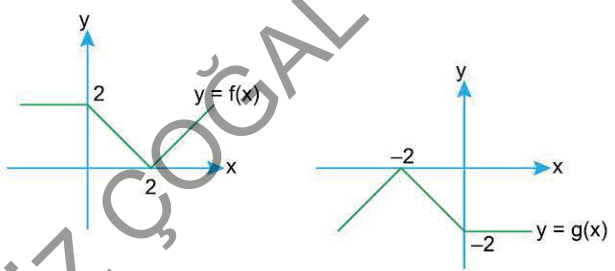
f(x) azalan bir fonksiyon olduğuna göre,

I. y = –f(x)
II y = f(–x)
III. y = –f(–x)

fonksiyonlarından hangileri azalandır?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

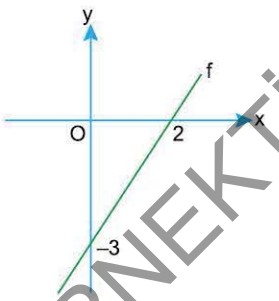
3. Aşağıda y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

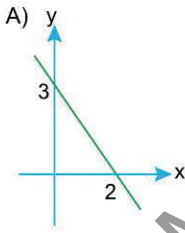


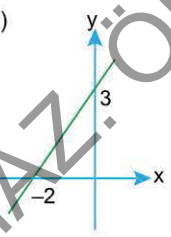
Buna göre, g(x) fonksiyonunun f(x) türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

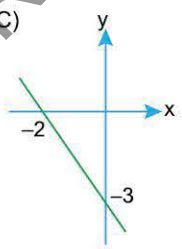
A) –f(x) B) f(–x) C) –f(1 – x)
D) –f(–x) E) f(1 – x)

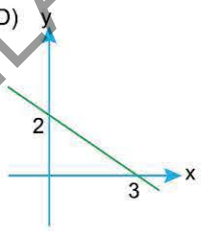
4. **Yandaki grafik y = f(x) fonksiyonunun grafiği olduğuna göre, y = –f(–x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

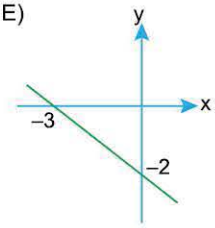


A)


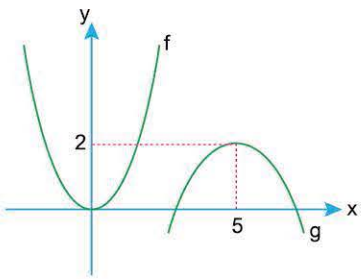
B)


C)


D)


E)


5.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiğine sırasıyla aşağıdaki dönüşümler uygulanarak y = g(x) fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

- x eksenine göre simetri
- 5 birim sağa yatay öteleme
- 2 birim yukarı dikey öteleme

Buna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) y = –f(x – 5) – 2 B) y = –f(x – 5) + 2
C) y = –f(x + 5) + 2 D) y = –f(x + 5) – 2
E) y = f(x – 5) + 2

İZİNSİZ ÇOĞALTILAMAZ, BASILAMAZ. ÖRNEKTİR.

1-C 2-C 3-D 4-B 5-B