

AYT



Soru Kalıpları ve Açıklamalı Çözümlerle

İNTEGRAL

SORU BANKASI

Fatih TURGUT
Kurbani KAYA
Güven KURT

- ✓ Stratejik Soru Kalıpları
- ✓ Çözümlü Sorular
- ✓ Testler
- ✓ Soru Çözüm Videolu
- ✓ Soru Sayısı: 681



İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM:	BELİRSİZ İNTEGRAL	6 - 41
1. MODEL:	Diferansiyel Kavramı	6
2. MODEL:	Belirsiz İntegrale Giriş	8
3. MODEL:	$f(x) = x^n$ Fonksiyonlarının İntegrali	10
4. MODEL:	İntegral Özellikleri	12
5. MODEL:	İntegral - Diferansiyel İlişkileri	14
6. MODEL:	Çarpımlı - Bölümlü İntegraller	16
7. MODEL:	İntegralden Fonksiyonu Çekelim	18
8. MODEL:	Türevi Verilen Fonksiyonun İlk Hâlini Bulma	20
9. MODEL:	Çarpım ve Bölüm İçeren Değişken Değiş-tirmeler	22
10. MODEL:	Köklü İfade İçeren Değişken Değiş-tirmeler	24
2. BÖLÜM:	BELİRLİ İNTEGRAL	42 - 91
1. MODEL:	Belirli İntegrale Giriş	42
2. MODEL:	Belirli İntegralin Özellikleri	44
3. MODEL:	Belirli İntegrali Toplama ve Çıkarmaya Dağıtma	46
4. MODEL:	Fonksiyonun Tek - Çift Olması Durumunda Belirli İntegrali Alma	48
5. MODEL:	Belirli İntegralde Parçalama Özelliği	50
6. MODEL:	Parçalı Fonksiyonların Belirli İntegrali	52
7. MODEL:	Mutlak Değerli Fonksiyonların Belirli İntegrali	54
8. MODEL:	Değişken Değiş-tirmeli Belirli İntegraller	56
9. MODEL:	Teorik Değişken Değiş-tirmeli Belirli İntegraller	58
10. MODEL:	$\int_a^b f(x)dx$ İntegralinin Sonucundan Yararlanarak $\int_c^d f(mx + n)dx$ İntegralinin Sonucunu Hesaplama	60

3. BÖLÜM: İNTEGRALDE ALAN	92 - 152
1. MODEL: Belirli İntegral ile Alan Hesaplama	92
2. MODEL: İki Fonksiyon Arasında Kalan Alan Hesaplama	94
3. MODEL: Birden Fazla Parçaların Alanları Toplamı	96
4. MODEL: Grafik ve Şekiller Yardımıyla İntegral Hesabı	98
5. MODEL: Bir Fonksiyon ile Tersinin Alanları Toplamı	100
6. MODEL: A YA 2A – A YA 3A... Pratik Yöntemi	102
7. MODEL: Parabol - Doğru ve Parabol - Parabol Arasındaki Alanın Pratik Yöntemi	104
8. MODEL: Alanları İlişkisi Verildiğinde Alan Hesaplamaları	106
9. MODEL: Fonksiyonun Türevini Kullanarak Alan Hesaplama	108
10. MODEL: Çemberli Alan Hesaplamaları	110
11. MODEL: İntegralin Fiziksel Yorumu ve İntegral Problemleri	112
12. MODEL: Riemann Toplamı	114

1. BÖLÜM: BELİRSİZ İNTEGRAL

1. MODEL | DİFERANSİYEL KAVRAMI



BİLGİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun x e göre türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x) \text{ olduğundan}$$

$$dy = f'(x) \cdot dx \text{ olur.}$$

Burada dy ifadesine $f(x)$ in diferansiyeli, dx ifadesine de diferansiyel çarpanı denir.

ÖRNEKLER

1. a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

b) $g(u) = u^3 - 4$

c) $h(m) = \frac{2m}{m+1}$

fonksiyonlarının diferansiyellerini bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx \text{ olduğuna göre,}$$

$$d(f(x)) = (3x^2 - 8x) \cdot dx \text{ elde edilir.}$$

b) $d(g(u)) = g'(u) \cdot d(u)$

$$= 3u^2 \cdot du$$

c) $d(h(m)) = h'(m) \cdot dm$

$$= \frac{2 \cdot (m+1) - 1 \cdot (2m)}{(m+1)^2} \cdot dm$$

$$= \frac{2}{(m+1)^2} \cdot dm$$

2. $d(x^3 + y^2 + x \cdot y)$ ifadesi

I. $3x^2 \cdot dx$

II. $(3x^2 + y) \cdot dx$

III. $(2y + x) \cdot dy$

yukarıdaki ifadelerden hangileri olabilir?

Açıklamalı Çözüm:

x e göre diferansiyel alınır

$$d(x^3 + y^2 + x \cdot y) = (3x^2 + y) \cdot dx$$

y ye göre diferansiyel alınır

$$d(x^3 + y^2 + xy) = (2y + x) \cdot dy$$

elde edilir.

Buradan II ve III öncülleri doğrudur.

3. $3x^2 + 5 = 2u^3 + u$

için aşağıda verilen eşitliklerden hangisi doğrudur?

A) $6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot dx$

B) $6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$

C) $6x \cdot du = (6u^2 + 1) \cdot dx$

D) $6x \cdot du = (6u^2 + 1) \cdot du$

E) $(6x + 5) \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$

Açıklamalı Çözüm:

$$3x^2 + 5 = 2u^3 + u$$

eşitliğinin diferansiyelini alırsak,

$$d(3x^2 + 5) = d(2u^3 + u)$$

$$6x \cdot dx = (6u^2 + 1) \cdot du$$

elde edilir. Cevap B eşitliğidir.

4. $d(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) = (3x^2 + ax + b)dx$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

$$d(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) = (3x^2 + ax + b)dx$$

$$(3x^2 + 6x - 5) \cdot dx = (3x^2 + ax + b)dx$$

$$3x^2 + 6x - 5 = 3x^2 + ax + b$$

polinom eşitliğinden $a = 6$, $b = -5$ olup $a + b = 1$ dir.

5. $x^3 \cdot d\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

$$x^3 \cdot d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x^3 \cdot \left(\frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$= x \cdot (f'(x) \cdot x - f(x)) \cdot dx$$

$$= [x^2 \cdot f'(x) - x \cdot f(x)] \cdot dx$$

elde edilir.



032E0192

1. $d(x^2 - 3x + 5)$
diferansiyelinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(x^2 - 3)dx$ B) $(2x - 5)dx$ C) $(2x - 3)dx$
D) $(2x + 5)dx$ E) $(x^2 - 3x + 5)dx$

2. $\frac{d(x^3 - 2x^2 - 1)}{3x - 4}$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3x^2$ B) xdx C) $(x + 1)dx$
D) $(3x^2 - 1)dx$ E) $(3x^2 - 4x)dx$

3. $\frac{d(3x^4 - 2)}{d(x^3 + 1)}$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $12x^3dx$ B) $12x^3$ C) $3x$
D) $4x$ E) $4xdx$

4. $x^2 \cdot d\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $x^2 - 1$ B) $(x^2 - 1)dx$ C) x^2dx
D) $x^2 + 1$ E) $(x^2 + 1)dx$

5. $d(f(x)) = 4x^3dx - \frac{1}{x^2}dx$
olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) 2 E) 3

6. $y = 4x - 2t + 2$
olduğuna göre,

- I. $dy = 4dx$
II. $dy = -2dt$
III. $dt = 2dx$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

7. $d(x^2 - x + 3y^2 + 2)$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $(2x - 1)dx$ B) $(2 + 6y)dy$ C) $(2x - 1)dy$
D) $(2x - 1 + 6y)dx$ E) $6ydx$

8. $d(f(x)) = (1 - 3x^2)dx$
olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) $x - x^3 + 5$ B) $x - x^3 + c$ C) $x - x^3 + 1$
D) $2x - x^3 + 4$ E) $x - x^3$

1. BÖLÜM: BELİRSİZ İNTEGRAL

2. MODEL | BELİRSİZ İNTEGRALE GİRİŞ



BİLGİ

- Belirsiz integral, diferansiyeli bilinen bir fonksiyonun **ilk hâlinin** tespit edilmesi işlemidir.
- Diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir ve
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$
ile gösterilir.

Bu eşitlikte,

- \int sembolüne integral işareti denir.
- c ye integral sabiti denir.
- $f(x)$ e integrali alınan fonksiyon
- $F(x)$ e $f(x)$ in ters türevi
- $F(x) + c$ yi bulma işlemine de belirsiz integral alma işlemi denir.

ÖRNEKLER

1. $\int 2x \cdot dx = x^2 + c$

eşitliği için aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur.

- $x^2 + c$ nin türevi $2x$ tir.
- x e göre türev alınmıştır.
- $2x$ in integrali $x^2 + c$ dir.
- c integral sabitidir.

Açıklamalı Çözüm:

Türevi belli olan bir fonksiyonu bulmak için yapılan işleme integral alma işlemi denir.

$$x^2, x^2 + 3, x^2 - 7, x^2 + \sqrt{3}, \dots$$

ifadelerine x e göre türevi $2x$ tir. Sabitin türevi sıfır olduğu için $2x$ in integrali $x^2 + c$ dir. Burada c ye integral sabiti denir.

$$x^2 + c \xrightarrow{\text{türev}} 2x$$
$$\xleftarrow{\text{integral}}$$

Burada verilen öncüllerin hepsi de doğrudur.

2. $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$
integrali neye eşittir?

Açıklamalı Çözüm:

Türevi $3x^2$ olan x^3

Türevi $2x$ olan x^2

Türevi 1 olan x

olacağından dolayı,

Türevi $3x^2 + 2x + 1$ olan fonksiyonun ilk hâli $x^3 + x^2 + x + c$ şeklindedir.

O hâlde, $\int (3x^2 + 2x + 1)dx = x^3 + x^2 + x + c$ elde edilir.

3. $\int [f(x) + x \cdot f'(x)]dx$

integralinin sonucunu bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ olduğundan

$[x \cdot f(x)]' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$ olur.

Buradan türevi $f(x) + x \cdot f'(x)$ olan fonksiyonun ilk hâli $xf(x) + c$ şeklinde olmalıdır.

O hâlde, $\int [f(x) + xf'(x)]dx = xf(x) + c$ elde edilir.

4. $\int \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \right) dx$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

olduğundan,

$$\left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2}$$

olur.

Buradan türevi

$$\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$$

olan fonksiyonun ilk hâli

$$\frac{f(x)}{x} + c$$

şeklinde olmalıdır.

O hâlde,

$$\int \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \right) \cdot dx = \frac{f(x)}{x} + c$$

elde edilir.



1. $\int dx + \int dy$
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x + y + c$ B) $2x$ C) $x^2 + y^2$
D) $x + y$ E) $xy + c$

2. $\int 2dx$
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{x}{2} + c$ B) $2x$ C) $2x + c$
D) $x + c$ E) $x^2 + c$

3. I. $\int \sqrt{3}dx = \sqrt{3}x + c$

II. $\int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + c$

III. $\int (x^2 - 1)dx = 2x - 1 + c$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

4. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\int \pi dx = \pi x + c$ B) $\int 3dy = 3y + c$
C) $\int y dx = yx + c$ D) $\int m dx = mx + c$
E) $\int 2x dy = x^2 + c$

5. $\int (6 - 3\sqrt{2})dx$
integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6 - 3\sqrt{2}x + c$ B) cx C) $6x - 3\sqrt{2}x + c$
D) $6x - 3\sqrt{2}x$ E) $6 - 3\sqrt{2}x$

6. $f(x) = \int (m^2 - 1)dx$
Buna göre, $f(3) - f(-1)$ farkı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $2m^2 - 2$ B) $2m^2 - 4$ C) $4m^2 - 2$
D) $4m^2 - 4$ E) 0

7. I. $\int [f(x) + x \cdot f'(x)]dx = x \cdot f(x) + c$

II. $\int \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx = \frac{x}{f(x)} + c$

III. $\int [f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)]dx = f(x) \cdot g(x) + c$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

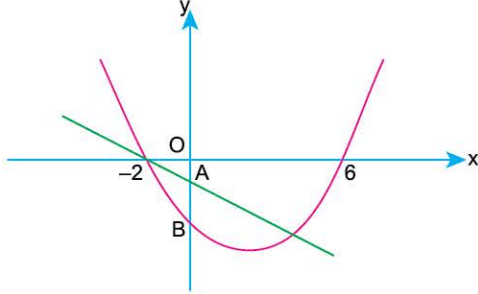
- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III



1. c reel sayı olmak üzere,

$$\int f(x)dx = g(x) + c$$

eşitliğini sağlayan f ve g fonksiyonları için; aşağıda $f(-x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları grafikleri verilmiştir.



Buna göre, $\frac{|OA|}{|AB|}$ oranı kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

2. $\int f(x)dx$, belirsiz integralini değişken değiştirme yöntemiyle çözmek isteyen Melek, $x + 1 = u$ dönüşümü yaptığında

$\int \sqrt{u}$ du belirsiz integralini elde ediyor.

Numan, Meleğin elde ettiği integrali $u = t^2$ dönüşümü yaparak,

$\int g(t)dt$ belirsiz integralini elde ediyor.

Buna göre, $g(3) - g(1)$ farkı kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

3. $P(x)$ polinomu için,

- $\text{der}(P(x)) \geq 2$
- Çift dereceli terimlerden oluşuyor.
- Başkatsayısı negatiftir.

bilgileri veriliyor.

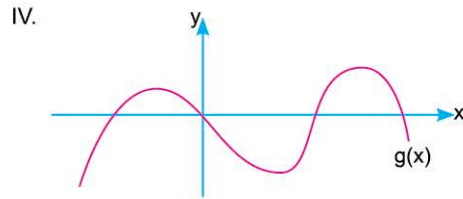
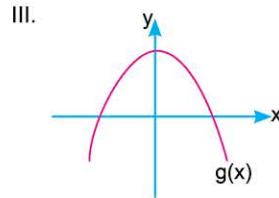
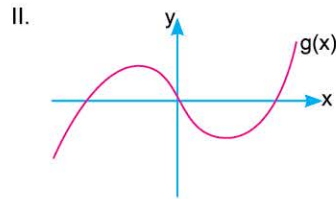
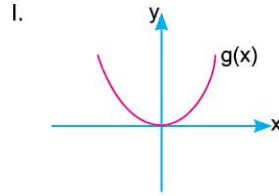
Bir bilgisayar programına yukarıdaki şartlara uygun polinom yazılıyor. Program aşağıdaki işlemleri sırasıyla yapıyor.

1) $f(x) = \int P(x)dx$, integral sabitini sıfır olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonunu buluyor.

2) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonunu buluyor.

3) $g(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziyor.

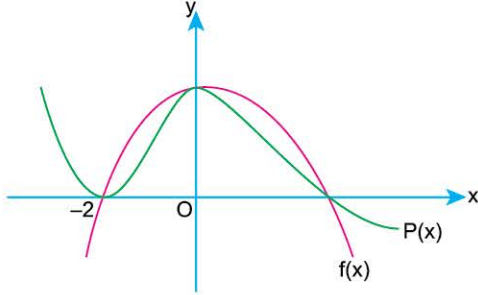
Buna göre, bilgisayarın çizdiği grafik aşağıdaki grafiklerden hangileri olabilir?



- A) I ve II B) I ve III C) I, II ve III
D) Yalnız IV E) Yalnız III



1. a ve b birer gerçel sayılardır. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde $P(x) = -x^3 - x^2 + ax - b$ polinomunun grafiği verilmiştir.

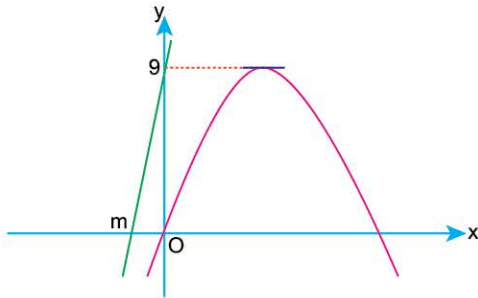


$y = f(x)$ parabolü, $P(x)$ polinomunun eksenleri kestiği noktalardan geçmektedir.

Buna göre, $\int f(x)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $\frac{x^3}{3} - 6x + c$ B) $x^3 + 12x + c$
 C) $x^3 - 12x + c$ D) $-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 12x + c$
 E) $x^3 - x^2 + 12x + c$

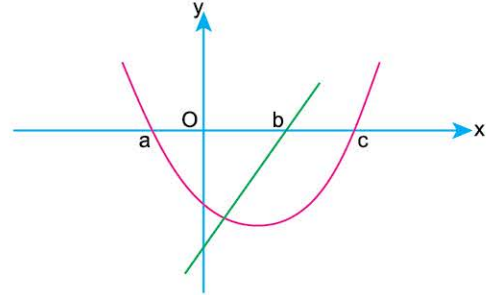
2. Aşağıda dik koordinat düzleminde $y = f(-x)$ ve $y = \int f(x)dx$ grafikleri verilmiştir.



Buna göre, m kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -5 D) -4 E) -9

3. Aşağıda dik koordinat düzleminde $y = f(x)$ ve $y = \int f(x)dx$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



a, b ve c, x eksenini kestiği noktalardır.

a + c = 12 olduğuna göre, b kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

4. Uygun şartlarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$g(x) = \int (x^3 f'(-x) - 3x^2 f(-x)) dx$$

$$f(-1) = g(1) = 3$$

$$f(2) = 5$$

olduğuna göre, g(-2) kaçtır?

- A) 2 B) 28 C) 34 D) 40 E) 46