

ÖSYM
Sınavları İçin

Konu Modelleri ve Açıklamalı Çözümlerle

LİMİT - TÜREV

SORU BANKASI

Ferhat ALTUN

Stratejik Bilgiler



Çözümlü Sorular



Testler



Soru Çözüm Videolu



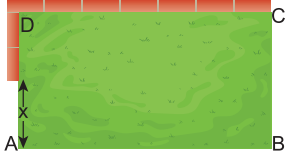
Soru Sayısı: 706

OKYANUS

TEST

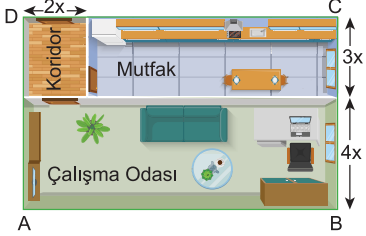
11. MODEL: MAKSİMUM - MİNİMUM PROBLEMLERİ (FONKSİYON OLUŞTURMA)



1.  Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin bir kenarı ile diğer bir kenarının yarısına kadar duvar örülmüştür. Geri kalan kısma bir sıra tel çekilmiştir.

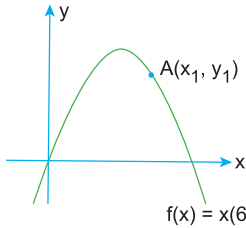
Kullanılan telin uzunluğu 96 metre olduğuna göre, bahçenin alanını veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $6x \cdot (24 - x)$ B) $x \cdot (48 - 2x)$ C) $6x \cdot (48 - x)$
D) $6x \cdot (32 - x)$ E) $3x \cdot (16 - x)$

2.  Koridor, mutfak ve çalışma odasında oluşan bir iş yerinin yukarıda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir ve bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 80 metredir.

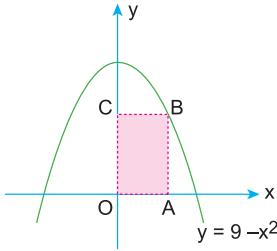
Bu iş yerinin mutfağının alanını veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $120x^2 - 24x^3$ B) $120 - 24x^2$ C) $120x - 12x^2$
D) $120x - 27x^2$ E) $120x - 24x^3$

3.  Şekildeki $A(x_1, y_1)$ noktası denklemleri $f(x) = x(6 - x)$ olan parabol üzerindedir.

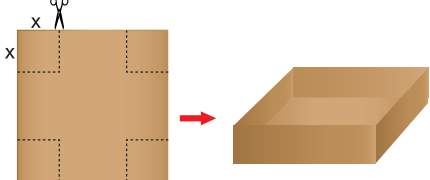
Buna göre, $x_1 + y_1$ toplamının x_1 cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x_1^2 - 8x_1$ B) $x_1^2 - 5x_1$ C) $7x_1 - x_1^2$
D) $9x_1 - x_1^2$ E) $4x_1 - x_1^2$

4.  Şekilde B köşesi $y = 9 - x^2$ parabolü üzerinde olan OABC dikdörtgeni verilmiştir.

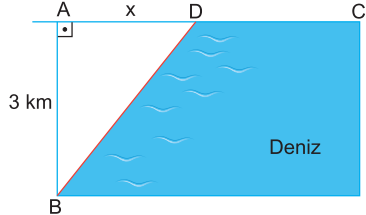
B noktasının apsisi x olduğuna göre, OABC dikdörtgeninin alanı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $9x - x^3$ B) $10x - x^3$ C) $8x - x^3$
D) $x^3 - 6x$ E) $x^3 - 12x$

5.  Bir kenarı 12 cm olan kare şeklindeki karton, köşelerinden eşit kareler kesilip çıkarıldıktan sonra dikdörtgen prizma şeklinde kutu yapılmak isteniyor.

Bu kutunun hacmini veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x \cdot (12 - x)^2$ B) $2x \cdot (12 - 2x)^2$ C) $x \cdot (6 - 2x)^2$
D) $2x \cdot (6 - 2x)^2$ E) $4x \cdot (6 - x)^2$

6.  Emircan kıyından 3 km açıktaki B noktasında bir kayıkta bulunmaktadır. Denizde kayıkla saatte 5 km gidebilen Emircan, sahilde 7 km/sa hızla yol almaktadır.

IADI = x km, IACI = 8 km olmak üzere, en kısa sürede C noktasına varmak isteyen Emircan'ın harcadığı zamanın x cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{5} + \frac{8-x}{7}$ B) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{7} + \frac{8-x}{5}$ C) $\frac{\sqrt{x^2+5}}{5} + \frac{8-x}{7}$
D) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{5} + \frac{x}{7}$ E) $\frac{\sqrt{x^2+9}}{7} + \frac{x}{5}$

1-D

2-D

3-C

4-A

5-E

6-A

3. BÖLÜM: TÜREV UYGULAMALARI

13. MODEL | MAKSİMUM - MİNİMUM PROBLEMLERİ (ŞEKLİ)

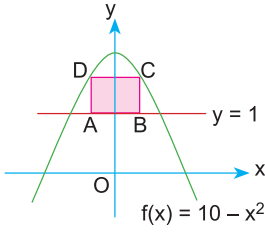


BİLGİ

Şekil içeren maksimum - minimum problemlerinde en büyük ya da en küçük olması istenen değeri (uzunluk, hacim, alan, ...) tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak ifade ettikten sonra bu fonksiyonun türevi alınarak maksimum ya da minimum değeri araştırılır.

ÖRNEK

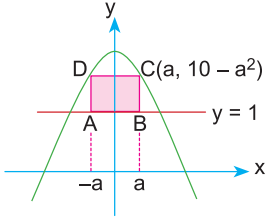
1.



Yandaki şekilde $f(x) = 10 - x^2$ parabolü ile $y = 1$ doğrusunun grafiği verilmiştir.

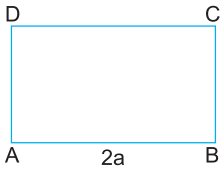
ABCD dikdörtgeninin A ve B köşeleri $y = 1$ doğrusu üzerinde C ve D köşeleri ise parabol üzerinde olduğuna göre, ABCD dikdörtgeninin alanının alabileceği en büyük değer kaç birimkaredir?

Açıklamalı Çözüm:



B noktasının apsisi $x = a$ olsun. Bu durumda C noktasının da apsisi $x = a$ olacaktır. Parabol y eksenine göre simetrik olduğundan A ve D noktalarının apsisi $x = -a$ olur.

C noktası parabol üzerinde olduğundan C noktasının ordinatı $y = 10 - a^2$ olur. Bu durumda ABCD dikdörtgeninin AB kenarının uzunluğu $|AB| = 2a$ olurken CB kenarının uzunluğu ise $|CB| = (10 - a^2) - 1$ olacaktır.



$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 2a(9 - a^2) \\ g(a) &= 2a(9 - a^2) \\ g(a) &= 18a - 2a^3 \end{aligned}$$

$g(a)$ fonksiyonunun türevini inceleyelim:

$$\begin{aligned} g(a) &= 18a - 2a^3 \\ g'(a) &= 18 - 6a^2 \\ g'(a) = 0 &\Rightarrow 18 - 6a^2 = 0 \\ &\Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ ve } a = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

a	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$g'(a)$	-	0	0	-
$g(a)$	Azalan	Min.	Max.	Azalan

$g'(a)$ nın işaret tablosundan da anlaşılacağı gibi $g(a)$ fonksiyonu $a = \sqrt{3}$ için maksimum değerini alır

$$\begin{aligned} g(a) &= 18a - 2a^3 \Rightarrow g(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(3\sqrt{3}) \\ &\Rightarrow g(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

O hâlde, ABCD dikdörtgeninin alanı en çok $12\sqrt{3}$ birimkare olur.



BİLGİ

Maksimum - minimum problemlerinin bazılarında kullanılabilecek pratik bilgiler:

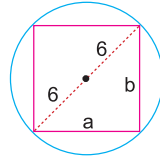
- Çevresi eşit dikdörtgenlerden alanı en büyük olanı karedir.
- Bir daire içine çizilebilecek, köşeleri çember üzerinde olan en büyük alanlı dikdörtgen karedir.
- Bir üçgenin içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanı üçgenin alanının yarısı kadardır.

ÖRNEKLER

1. Yarıçapı 6 br olan bir dairenin içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?

Açıklamalı Çözüm:

1. Yol:



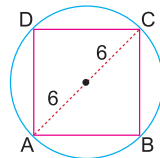
Dikdörtgenin kenar uzunluklarına a ve b diyelim. Bu durumda pisagor bağıntısı ile $a^2 + b^2 = 144$ eşitliği elde edilir.

$$\text{Alan} = A = a \cdot b$$

$$A = a \cdot \sqrt{144 - a^2}$$

$A = a \cdot \sqrt{144 - a^2}$ fonksiyonunun türevi alınarak maksimum değeri araştırılır.

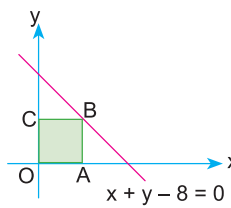
2. Yol:



Bir dairenin içine yerleştirilebilecek maksimum alanlı dikdörtgen kare olacaktır. Karenin köşegeni $|AC| = 12 \text{ br} \Rightarrow |AB| = 6\sqrt{2} \text{ br}$ olur.

$$A(ABCD) = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ br}^2$$

2.



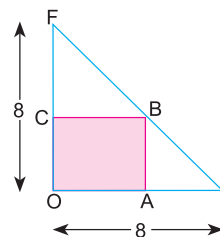
B köşesi $x + y - 8 = 0$ doğrusu üzerinde olan OABC dikdörtgeninin alanı en çok kaç br^2 dir?

Açıklamalı Çözüm:

1. Yol:

A noktasının apsisine $x = a$ diyerek OA ve AB kenar uzunluklarını a ya bağlı ifade edip işlemlere devam edebiliriz.

2. Yol:



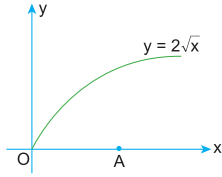
Bir dik üçgenin içine yerleştirilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin alanı üçgenin alanının yarısıdır.

$$A(OABC) = \frac{A(\widehat{OEF})}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2}$$

$$A(OABC) = \frac{32}{2} = 16 \text{ br}^2$$



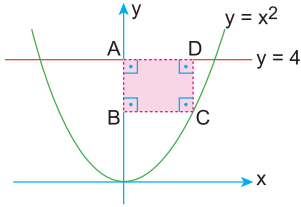
1.



Şekildeki $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $A(3, 0)$ noktasına en yakın noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

2.

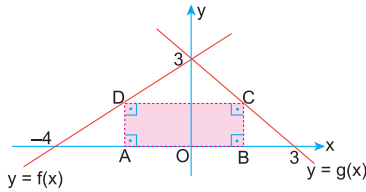


Yandaki denklemleri $y = x^2$ ve $y = 4$ olan fonksiyonların grafikleri çizilmiştir.

Buna göre, C köşesi parabol üzerinde olan ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç br^2 dir?

- A) $\frac{2}{43}$ B) $\frac{4}{43}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

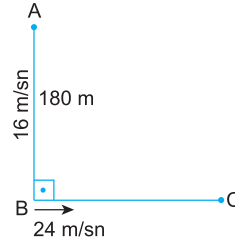
3. Aşağıda $y = f(x)$ ile $y = g(x)$ doğrusal fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir. D ve C noktaları sırasıyla $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ doğruları, A ve B noktaları ise x ekseninde.



Buna göre, ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç br^2 dir?

- A) $\frac{7}{2}$ B) 4 C) $\frac{21}{4}$ D) 5 E) 6

4.

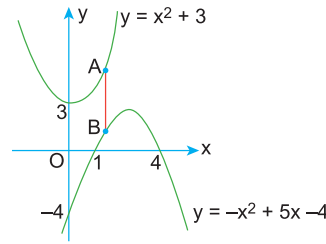


Bir hareketli A noktasından 16 m/sn hızla B ye doğru, başka bir hareketli B noktasından 24 m/sn hızla C ye doğru aynı anda harekete başlıyorlar.

$|AB| = 180$ m olduğuna göre, kaç saniye sonra iki hareketli arasındaki mesafe en az olur?

- A) $\frac{45}{13}$ B) $\frac{15}{13}$ C) $\frac{8}{13}$ D) $\frac{4}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

5.

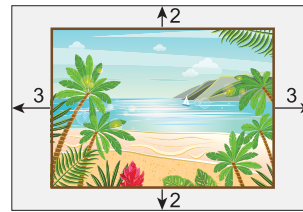


Şekilde $y = x^2 + 3$ ve $y = -x^2 + 5x - 4$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. A noktası $y = x^2 + 3$ ve B noktası $y = -x^2 + 5x - 4$ eğrileri üzerindedir.

Buna göre, y eksenine paralel olarak çizilen $[AB]$ nin uzunluğunun alabileceği en küçük değer kaç br dir?

- A) $\frac{25}{16}$ B) $\frac{25}{8}$ C) $\frac{25}{4}$ D) $\frac{31}{8}$ E) $\frac{5}{4}$

6.



Ressam Zeynep Hanım alanı yarım metrekare olan dikdörtgen biçiminde bir tuval seçerek şekildedeki gibi yanlarından üçer cm, alt ve üst kısımlarından ikişer cm boşluk bırakarak bir resim yapacaktır.

Zeynep Hanım'ın resim yaptığı alanın en büyük olması için seçmesi gereken tuvalin uzun kenarı kaç cm olmalıdır?

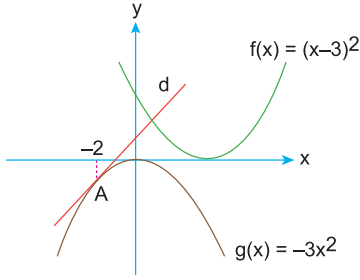
- A) $\frac{10}{\sqrt{3}} - 6$ B) $\frac{10}{\sqrt{3}} - 4$ C) $75\sqrt{3}$
D) $50\sqrt{3}$ E) $30\sqrt{3}$



UYGULAMA TESTİ 5

3. BÖLÜM: TÜREV UYGULAMALARI

1.



Yukarıdaki şekilde d doğrusu $g(x) = -3x^2$ eğrisine apsisi -2 olan A noktasında teğettir.

Buna göre, d doğrusu ile $f(x) = (x-3)^2$ eğrisinin kesiştiği noktaların apsilerinin toplamı kaçtır?

- A) -12 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24

2. Recep Bey evindeki yüzme havuzunu zararlı bakterilerin yok edilmesi için periyodik olarak ilaçlıyor. İlaçlama yapıldıktan t gün sonra havuzun suyunun cm^3 ünde

$$f(t) = 3t^3 - 36t + 80, \quad 0 \leq t \leq 7$$

bakteri görülüyor

Buna göre havuzdaki bakteri sayısının ilaçlamadan sonrakki en küçük değeri kaçtır?

- A) 32 B) 20 C) 80 D) 420 E) 2

3. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde artandır?

- A) $(-\infty, 1)$ B) $(-2, 1)$ C) $(1, \infty)$
D) $(0, 1)$ E) $(0, 2)$

4.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 15$$

fonksiyonu ile ilgili,

- I. $(-5, -2)$ aralığında artandır.
II. $(-2, 2)$ aralığında azalandır.
III. $(1, 5)$ aralığında artandır.
IV. $(4, \infty)$ aralığında artandır.
bilgileri veriliyor.

Buna göre, hangileri doğrudur?

- A) I ve II B) II ve IV C) I, II ve IV
D) III ve IV E) I, II, III ve IV

5.

$y = x^2 + 1$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusunun kesişim noktası A olsun. A noktasından $y = x^2 + 1$ eğrisine çizilen teğetin üzerinde bir B noktası alalım.

B noktasının orijine olan uzaklığı A'ya olan uzaklığının iki katı olduğuna göre, B'nin koordinatları çarpımı aşağıdaki-lerden hangisi olabilir?

- A) -6 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

6.

$$f(x) = |x| + |x - 2| + 5$$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde artandır?

- A) $(-3, -1)$ B) $(-1, 0)$ C) $(0, 2)$
D) $[1, 3)$ E) $(3, 5)$

1-D

2-A

3-C

4-C

5-D

6-E



1.

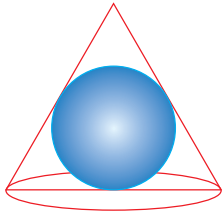


Bir kamyoncu yukarıda gösterilen A ve B noktaları arasında gidiş geliş yaparak un taşıyacaktır. Kamyon en az 15 çuval yük taşımakta bu esnada hızı 50 km/s olmaktadır. Bu kamyoncu alacağı her fazladan 1 çuval yük için hızını 2 km/s azaltmaktadır.

Buna göre, bu kamyoncu belli bir sürede en fazla sayıda çuvalı A noktasından B noktasına götürmek istiyorsa bir seferde kaç çuval un taşımalıdır?

- A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

2.



Yukarıdaki şekilde verilen koninin içine, yan yüzleriyle tabana teğet yarıçapı 4 cm olan bir küre yerleştiriliyor.

Buna göre, koninin hacminin minimum olması için koninin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır?

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

3. f fonksiyonu ile g fonksiyonu $(-7, 13)$ noktasında dik kesişmektedirler. $f'(-7) = 7$ olduğuna göre, $g'(-7)$ kaçtır?

- A) -13 B) $-\frac{1}{13}$ C) 7 D) $\frac{1}{7}$ E) $-\frac{1}{7}$

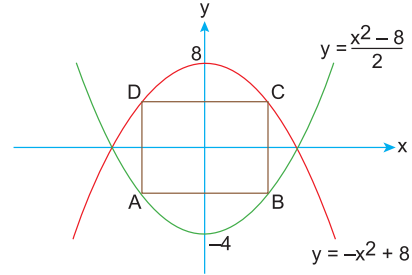
4. Ozan, telefonunda bulunan "Hata Payı" uygulamasında sırasıyla şu işlemleri yapıyor.

- 1) Bir c reel sayısı giriyor.
- 2) $2x + y = c$ olacak şekilde (x, y) reel sayıları giriyor.
- 3) Uygulama şartı sağlayan tüm (x, y) ikililerinden xy çarpımı en büyük olan ikiliyi seçiyor ve girilmiş olan (x, y) ikilisinin çarpımıyla olan farkını buluyor.

Ozan c = 20, x = 8 ve y = 4 değerlerini girdiğine göre uygulamanın bulduğu fark kaçtır?

- A) 0 B) 10 C) 18 D) 25 E) 32

5.



Yukarıdaki koordinat ekseninde çizilen kenarları koordinat eksenine paralel ve $2y = x^2 - 8$, $y = 8 - x^2$ parabolleri ile sınırlı kapalı bölge üzerinde çizilen en büyük alanlı dikdörtgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) $8\sqrt{6}$ B) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$ C) $9\sqrt{6}$
D) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$

6. Bir otomobil fabrikası tanesi 240.000 TL den yılda 15.000 otomobil üretip satıyor. Her bir otomobilin 20.000 lira daha ucuza satılması durumunda yılda 2500 otomobil daha fazla satılabilir. **Buna göre, yıllık en büyük kazancı sağlayacak otomobil fiyatı kaç bin TL dir?**

- A) 160 B) 170 C) 180 D) 200 E) 210

1-D

2-D

3-E

4-C

5-E

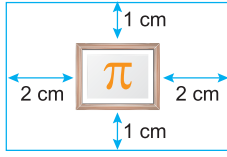
6-C



UYGULAMA TESTİ 21

3. BÖLÜM: TÜREV UYGULAMALARI

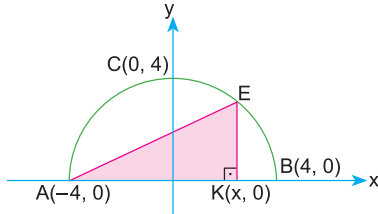
1.



Yukarıdaki şekilde gösterilen bir kartta üzerinde pi sembolü bulunan $\frac{25}{2}$ cm² alana sahip resim bulunmaktadır. Resmin üst ve alt tarafında birer cm yan taraflarında ikişer cm boşluk vardır. Buna göre, kartın alanının minimum olması için, çevresi kaç cm olmalıdır?

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 25 E) 27

2.

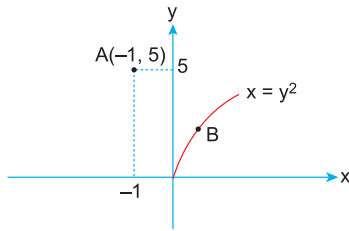


Yukarıdaki şekilde merkezi orijinde ve yarıçapı 4 birim olan yarım çember ile AEK dik üçgeni verilmiştir.

Buna göre, x in hangi değeri için AEK dik üçgeninin alanı en büyük olur?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

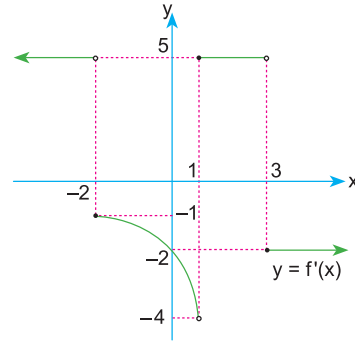
3.



Yukarıdaki şekilde $x = y^2$ parabolünün A(-1, 5) noktasına en yakın noktası B olduğuna göre, |AB| kaçtır?

- A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{6}$ E) 5

4.



Yandaki şekilde gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

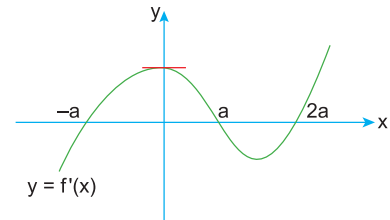
Buna göre,

- I. $x = 3$ noktası f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsidir.
II. f fonksiyonunun üç tane ekstremum noktası vardır.
III. $f(1) \geq f(3)$ tür.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) I ve III

5.



Gerçel sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonunun türevi f' ile gösterilmek üzere $y = f'(x)$ in grafiği yukarıdaki gibidir.

Buna göre, $y = f(x)$ ile ilgili verilen aşağıdaki bilgilerden hangileri daima doğrudur?

- I. $f(-a)$ bir yerel minimum değeridir.
II. $f(0) > 0$
III. $f(2a)$ bir yerel minimum değeridir.

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

1-E

2-C

3-C

4-D

5-D



UYGULAMA TESTİ 23

3. BÖLÜM: TÜREV UYGULAMALARI

1. $f(x) = ax^3 - 12x^2 + 21x + 11$ fonksiyonu veriliyor.
 $f'(x)$ türev fonksiyonunun yerel minimum değerinin -3 olmasını sağlayan a değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

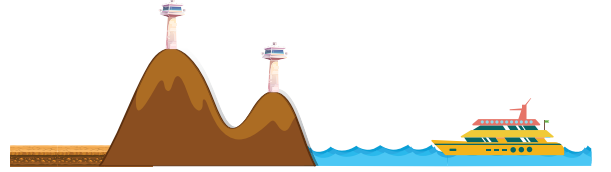
2. Başkatsayısı -1 olan, üçüncü dereceden gerçel katsayılı bir $P(x)$ polinomunun köklerinden ikisi 0 ve 1 dir.
Bu fonksiyonun $x = 1$ noktasında yerel minimum değeri varsa $P(2)$ kaçtır?

A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $y^2 = 16x$ parabolü ile $P(8, 0)$ noktası veriliyor. Parabolün P ye en yakın noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

4.



Bir deniz çıkartmasına karşı önceden hazırlıklı olmak isteyen bir komutan, içinde bir harita bilimcisinin ve bir matematikçinin de bulunduğu bir ekiple birlikte denize kıyısı olan şekildeki sıralı tepelerin her birinin zirvesine bir gözcü kulesi dikmek istiyor. Harita bilimci dağların şeklinin

$$P(x) = -x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 12x^2 + 55$$

fonksiyonunun grafiği şeklinde olduğunu buluyor. Gözcü kulelerinin yüksekliği 3 metredir.

Buna göre, denize en uzak olan gözcü kulesinin bir düşman gemisini görebilmesi için bu geminin ucunun kuleden en az kaç metre uzaklıkta olması gerekir?

(Not: Geminin yüksekliği dikkate alınmayacaktır.)

A) $\frac{29\sqrt{17}}{2}$ B) $\frac{29}{2}$ C) $\frac{58\sqrt{10}}{3}$ D) $\frac{58}{3}$ E) 58

5. f gerçel sayılar kümesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur.
 $f(2) = f(5) = 0$ olduğuna göre,
I. f fonksiyonunun bir tane yerel minimum ve yerel maksimum noktası vardır.
II. $f'(2) \cdot f'(5) \geq 0$ dir.
III. $f(3) > 0$, $f(4) < 0$ ise f fonksiyonunun en az 2 ekstremum noktası vardır.
İfadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

1-D

2-A

3-A

4-C

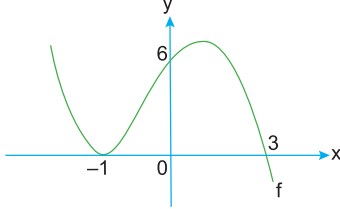
5-B



UYGULAMA TESTİ 29

3. BÖLÜM: TÜREV UYGULAMALARI

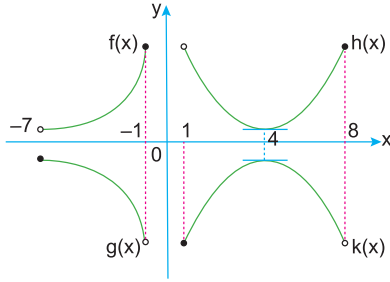
1. Üçüncü dereceden bir polinom fonksiyon olan f fonksiyonunun grafiği şekilde gösterilmiştir.



Buna göre, $f'(3)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -5 C) -8 D) -16 E) -32

2.



Grafikleri verilen fonksiyonlar için,
 $m \in (-7, -1)$, $n \in (1, 8)$ olmak üzere,

- I. $f'(m) \cdot g'(m) < 0$
 II. $h'(n) \cdot k'(n) \geq 0$
 III. $g'(m) \cdot k'(n) > 0$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve III E) II ve III

3.

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & , x \leq 3 \text{ ise} \\ 3(x - 4)^2 + 1 & , x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsileri toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 2mx - 2$$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında azalan olduğuna göre, m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $m < -1$ B) $m < -\frac{3}{2}$ C) $m > -1$
 D) $m > -\frac{3}{2}$ E) $m > -\frac{1}{2}$

5.

Rolle Teoremi: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(a) = f(b) \text{ ise}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

olacak şekilde (a, b) aralığında en az bir c elemanı vardır.

Buna göre,

$$f(x) = x^2 + 2x + 6$$

fonksiyonunun $[-5, 3]$ aralığında Rolle teoremini sağlayan x değeri kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

6.

Tamamı geri dönüştürülebilir malzemeden yapılmış boyutları $6 \times 12 \times 20$ cm olan dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutumuz var. Bu kutuyu aşağıdaki koşullar altında geri dönüştürmek istiyoruz.

Dönüştürülmüş malzemeyi kullanarak yeni iki kutu elde edeceğiz bu yeni kutuların birer ayrırtı 15 cm dir. Buna göre bu kutularda maksimum malzeme depolamak için diğer ayrırtların uzunlukları aşağıdakilerden hangisidir?
 (Kutular özdeşdir.)

- A) (6, 6) B) (6, 8) C) (6, 10)
 D) (8, 8) E) (8, 10)

1-E

2-D

3-B

4-B

5-C

6-A

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

7. MODEL | LİMİTİN VARLIĞI



BİLGİ

Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin var olması için fonksiyonun bu noktada soldan limiti ile sağdan limiti birbirine eşit olmalıdır.

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ olmak üzere $x = a$ noktasında f

fonksiyonunun limitinin var olması için,

- $L_1 \in \mathbb{R}$ ve $L_2 \in \mathbb{R}$
- $L_1 = L_2$

şartları sağlanmalıdır.

ÖRNEKLER

1. L bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = L$$

eşitliği sağlanıyor.

Buna göre,

I. $f(3) = L$

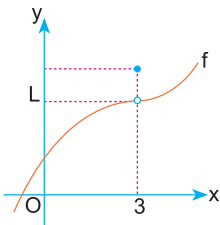
II. $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = 0$

III. $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{g(x)}{|g(x)|} \right] = 1$

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

Açıklamalı Çözüm:

- I. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ verilmiş. Biz bu bilgiden $x = 3$ noktasında sağdan ve soldan limitlerinin birbirine eşit olduğunu anlıyoruz. Bu durumda $f(3) = L$ olmak zorunda değildir. Örneğin f fonksiyonunun grafiğini aşağıdaki gibi düşünelim.



Grafikten de hemen görüleceği gibi $x = 3$ noktasında sağdan ve soldan limit L değeri iken $f(3) \neq L$ olabiliyor.

O hâlde, I nolu öncül her zaman doğru değildir.

- II. Limit işleminin toplama veya çıkarma işlemine dağılma özelliği olduğunu hatırlarsak

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = L - L = 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. II. öncül her zaman doğrudur.

III. L sayısının pozitif veya negatif olduğu bilgisi verilmemiş. Eğer L sayısı

$$\text{pozitif ise } \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{g(x)}{|g(x)|} \right] = 1 \text{ olur. Fakat } L \text{ sayısı negatif ise } \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{g(x)}{|g(x)|} \right] = -1$$

olur. Bu durumda III numaralı öncül her zaman doğru değildir.

2. Gerçel sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu her x için,

$$3 \leq f(x) \leq 4$$

eşitsizliklerini sağlıyor.

Buna göre,

I. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ vardır.

II. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ vardır.

III. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)|}{f(x)}$ vardır.

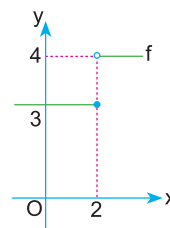
ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

Açıklamalı Çözüm:

Problemde bize sadece $3 \leq f(x) \leq 4$ bilgisi verilmiş. Bu bilgiden f fonksiyonu hakkında ulaşabileceğimiz sonuçlar,

- f fonksiyonu pozitif değerler alıyor.
- f fonksiyonunun görüntü kümesi $[3, 4]$ şeklinde olacaktır.

Bu durumda f fonksiyonunun grafiğinin $x = 2$ noktasında sıçrama yapıp yapmadığını bilemeyiz.



Örneğin, f fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olabilir. Grafikten de hemen görüleceği gibi $x = 2$ noktasında sağdan limit ile soldan limit değerleri birbirinden farklıdır.

O hâlde, I ve II. öncüllerdeki " $x = 2$ noktasında $f(x)$ ve $\frac{1}{f(x)}$ fonksiyonlarının limiti vardır." ifadeleri her zaman doğru olmayabilir.

Ancak III. öncülde durum biraz farklı. f fonksiyonu pozitif değerler aldığından

$$|f(x)| = f(x) \text{ olacaktır. Böylece } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1 \text{ olduğundan}$$

III. öncül her zaman doğrudur.



0A5002A4

1. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu her $-12 \leq x \leq -5$ için $5 \leq f(x) \leq 12$ eşitsizliğini sağlıyor.

Buna göre,

- I. $\lim_{x \rightarrow -7} (f(x) - |f(x)|)$ vardır.
 II. $\lim_{x \rightarrow -7} (x \cdot f(x))$ vardır.
 III. $\lim_{x \rightarrow -7} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ vardır.

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve II E) I, II ve III

2. $k \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} g(x) = 4k$$

eşitliği sağlanıyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlış olabilir?

- A) $\lim_{x \rightarrow -4} (f(x) + g(x)) = 8k$ B) $\lim_{x \rightarrow -4} (f(x) - g(x)) = 0$
 C) $\lim_{x \rightarrow -4} (f(x) \cdot g(x)) = 16k^2$ D) $\lim_{x \rightarrow -4} f^3(x) = 64k^3$
 E) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{4}{f(x)} \right) = \frac{1}{k}$

3. L bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayıların bir alt kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = L$$

eşitliği sağlanıyor.

Buna göre,

- I. $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = c$, $c \in \mathbb{R}$
 II. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$
 III. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (f(5 - x) + g(-2x + 8)) = L$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve II E) II ve III

4. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu her x için, $-3 \leq f(x) \leq 6$ eşitsizliği sağlanıyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ vardır. B) $\lim_{x \rightarrow 10} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ vardır.
 C) $\lim_{x \rightarrow -5} (x \cdot f(x))$ vardır. D) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0$
 E) $\lim_{x \rightarrow 4} (-9 \leq 2 f(4) + f(-4) \leq 18)$

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L$$

eşitliği veriliyor.

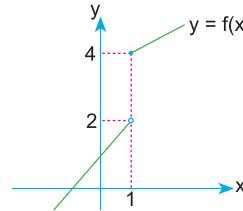
Buna göre,

- I. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 II. $f(2) = g(2)$
 III. $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = 0$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve III E) II ve III

- 6.



Yandaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir $g(x)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2g(x)) = L, \quad L \in \mathbb{R} \text{ olduğuna göre,}$$

- I. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ değeri vardır.
 II. $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(4 - x) - \lim_{x \rightarrow -1^+} g(-x) = c$ ve $c \in \mathbb{Z}$ dir.
 III. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ değeri vardır.

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
 D) I ve III E) II ve III

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

8. MODEL | KRİTİK NOKTA - PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ



BİLGİ

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında kuralı değişiyorsa bu noktaya f fonksiyonunun kritik noktası denir.

- $|f(x)|$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ denkleminin kökleri birer kritik noktadır.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \geq a \\ h(x) & , \quad x < a \end{cases}$$

fonksiyonunda $x = a$ noktası kritik noktadır.

ÖRNEKLER

1. $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

Mutlak değerli fonksiyonlarda, mutlak değer in içini sıfır yapan değerler birer kritik noktadır.

Bu durumda, $x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri (varsa) $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktaları olacaktır.

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 3x - 4 & = & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & -4 \\ x & & +1 \end{array}$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -1$$

O hâlde, $|x^2 - 3x - 4|$ fonksiyonunun kritik noktaları $x = 4$ ve $x = -1$ olur.

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \text{ ise} \\ 4 & , \quad 2 \leq x < 5 \text{ ise} \\ 3x + 1 & , \quad x \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun kritik noktaları $x = a$ ve $x = b$ noktaları ise, $f(a + b)$ değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

Parçalı tanımlı fonksiyonlarda, tanım kümesinin alt aralıklarının uç noktalarına bu fonksiyonunun kritik noktaları denir.

Başka bir ifadeyle, **fonksiyonun kuralının değiştiği noktalara kritik nokta denir.**

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ ve $x = 5$ noktalarında kuralı değiştiğinden bu noktalar birer kritik noktadır.

Bu durumda, $a = 2$ ve $b = 5$ seçilirse

$$f(a + b) = f(2 + 5) = f(7)$$

değerini bulmamız isteniyor.

$7 > 5$ olduğundan $f(7) = 3 \cdot 7 + 1 = 22$ olur.



BİLGİ

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \geq a \\ h(x) & , \quad x < a \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar için

- $x = a$ noktası dışında bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına dahil ise o parçada limit araştırılır.
- $x = a$ noktası kritik nokta olduğundan bu noktada limit araştırılırken sağdan ve soldan limit değerleri incelenir.

ÖRNEK

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & , \quad x \geq 3 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , \quad x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ limit değerlerini bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

İlk önce $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ değerini araştıralım.

$x = 2$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası olmadığından bu noktada sağdan ve soldan limite ayrı ayrı bakmamıza gerek yok.

$2 < 3$ olduğundan $x = 2$ noktası için $f(x) = 2x + 1$ kuralı geçerlidir.

$$\text{O hâlde, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5 \text{ bulunur.}$$

Şimdi ise $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ değerini araştıralım.

$x = 3$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası (kuralın değiştiği nokta) olduğundan bu noktadaki limit için sağdan ve soldan limit değerlerine bakmalıyız.

Sağdan Limit: ($x > 3$ için limit)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 8) = 3^2 - 8 = 1$$

Soldan Limit: ($x < 3$ için limit)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 1) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$x = 3$ noktasında sağdan limit değeri ile soldan limit değeri farklı olduğundan bu noktada $f(x)$ fonksiyonunun limiti yoktur.



1. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) 3

2. $f(x) = x^2 - x - 2$ ve $g(x) = x$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 4} (f \circ g)(x) + \lim_{x \rightarrow -3} (g \circ f)(x)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 15 D) 20 E) 23

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ 3 - x, & x \geq 2 \end{cases}$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 4

4. $f(x) = \begin{cases} 4x - 5, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 4 \\ 3x - 1, & x \geq 4 \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (g \circ f)(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

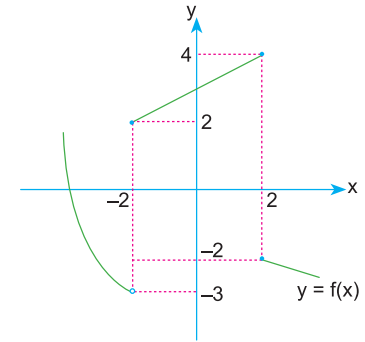
5. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 3x - 4, & x < 1 \end{cases}, g(x) = 5x - 4$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

6.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -4 B) -3 C) -2 D) 2 E) 4

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

11. MODEL | $f(x + k)$ FONKSİYONLARININ LİMİTİ



BİLGİ

$x = a$ noktasında $f(x + k)$ fonksiyonlarının limitini bulmak için x sayısı a ya sağdan (veya soldan) yaklaşırken $x + k$ ifadesinin davranışı incelenir.

ÖRNEKLER

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad x \geq 1 \text{ ise} \\ \frac{6}{x} & , \quad x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x + 3) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(4 - x)$ işleminin sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x + 3)$ limitinin değerini bulmak için x sayıları 1 e sağdan yaklaşırken $x + 3$ ifadesinin davranışını değer tablosu yaparak gözlemleyelim.

x	1.....1,01	1,02	1,03	1,04
$x+3$	4.....4,01	4,02	4,03	4,04

Tablodan anlaşıldığı gibi x sayıları 1 e sağdan yaklaşırken $x + 3$ ifadesi 4 sayısına sağdan yaklaşiyor.

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x + 3) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ eşitliğini yazabiliriz. Bu durumda $f(4^+)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4^3 + 1 = 65 \text{ bulunur.}$$

Pratik yol:

$x \rightarrow 1^+$ için x sayısını 1,01 olarak seçip $x + 3$ ifadesinde yerine yazarsak 4,01 buluruz. 4,01 sayısı 4 ün sağında bir değer olduğundan $x \rightarrow 1^+$ için $x + 3 \rightarrow 4^+$ yazılabilir.

Bu durumda $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(4 - x)$ limitini hesaplamak için değer tablosu yapmak yerine pratik yolu kullanalım.

$x \rightarrow 2^-$ için x sayısını 1,99 seçersek

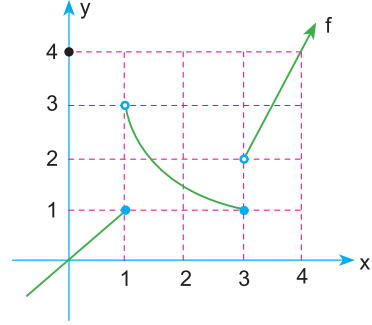
$4 - x$ ifadesi $4 - 1,99 = 2,01$ olacaktır.

O hâlde $x \rightarrow 2^-$ için $4 - x \rightarrow 2^+$ olur.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(4 - x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^3 + 1 = 9$$

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x + 3) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(4 - x)$ işleminin sonucu $65 + 9 = 74$ olur.

2.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(2x - 5) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(2 - x)$ işleminin sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

- $x \rightarrow 3^+$ için x sayısını 3,01 seçersek $2x - 5$ sayısı 1,05 olur. 1,05 sayısı ise 1 in sağında bir değerdir.

Bu yaklaşım ile

$x \rightarrow 3^+$ için $2x - 5 \rightarrow 1^+$ olacaktır.

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(2x - 5) = f(1^+)$ eşitliğini yazabiliriz.

Yani $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(2x - 5)$ limitini hesaplamak için $x \rightarrow 1^+$ iken $f(x)$ değerlerinin hangi sayıya yaklaştığını bulmalıyız.

$f(x)$ in grafiğine baktığımızda $x \rightarrow 1^+$ iken $f(x) \rightarrow 3$ olduğunu görürüz.

Bu durumda, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(2x - 5) = f(1^+) = 3$ olur.

- $x \rightarrow -1^-$ için x sayısını -1,01 seçersek $2 - x$ sayısı 3,01 olur. 3,01 sayısı ise 3 ün sağında bir değerdir.

Bu yaklaşım ile

$x \rightarrow -1^-$ için $2 - x \rightarrow 3^+$ olacaktır.

O hâlde, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(2 - x)$ limitini hesaplamak için $x \rightarrow 3^+$ iken $f(x)$ değerlerinin hangi sayıya yaklaştığını bulmalıyız.

$f(x)$ in grafiğine baktığımızda $x \rightarrow 3^+$ iken $f(x) \rightarrow 2$ olduğunu görürüz.

Bu durumda, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(2 - x) = f(3^+) = 2$ olur.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(2x - 5) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(2 - x)$ toplamının sonucu ise $3 + 2 = 5$ tir.



0BCA0EDE

1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x-1)}{f(5-x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(4x-17) = 13$ ve $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(5-2x) = 2c-1$

olduğuna göre, c değeri kaçtır?

- A) 3 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

3. $f(x) = \begin{cases} 5x-2, & x \geq 1 \\ x+13, & x < 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(4-x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 13 D) 14 E) 15

4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x+3) = 2$ ve $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(7-x) = 11$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 5^+} (2f(9-x) - 3g(8-x))$ limitinin değeri kaçtır?

- A) -29 B) -24 C) -12 D) -6 E) -3

5. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a$ ve $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = b+2$

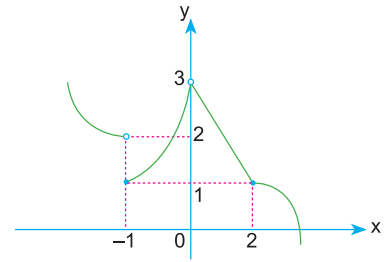
olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-1)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) $-a-b$ B) $a-b-2$ C) $b-a+2$
D) $2a-b$ E) $a+b+2$

6.

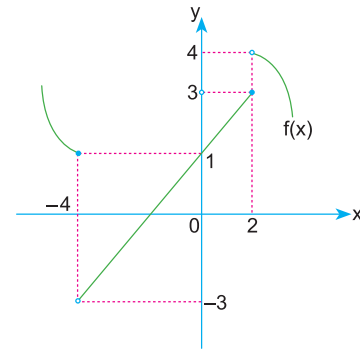


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x-2)}{f(3-x)}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) 1 E) 2

7.



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x-5) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(5-x)$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -7 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

1-D

2-C

3-D

4-A

5-B

6-D

7-D

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

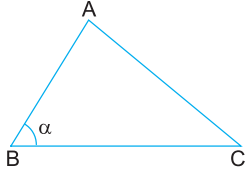
13. MODEL | GEOMETRİK ŞEKİLLERDE LİMİT



BİLGİ

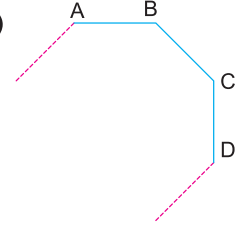
Geometrik şekillerde limit uygulamaları için aşağıdaki iki örneği inceleyelim.

1)



$a \rightarrow 90^\circ$ için yani a açısı 90° ye yaklaşırken ABC üçgeni B açısı 90° olan bir dik üçgen olma eğilimi gösterir.

2)



n kenarlı bir düzgün çokgen için $n \rightarrow \infty$ için yani kenar sayısı son-
suza yaklaşırken düzgün çokgen
çember olma eğilimi gösterir.

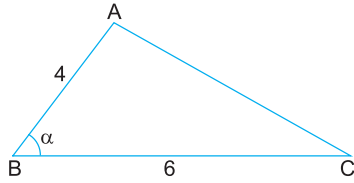
ÖRNEKLER

1. ABC bir üçgen

$|AB| = 4$ birim

$|BC| = 6$ birim

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$

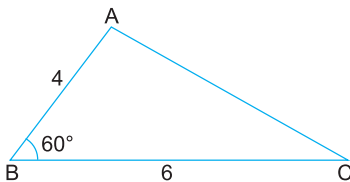


Yukarıdaki verilere göre, $\lim_{\alpha \rightarrow 60^\circ} A(\widehat{ABC})$ limitinin değeri kaç-
tır?

Açıklamalı Çözüm:

$\lim_{\alpha \rightarrow 60^\circ} A(\widehat{ABC})$ limitini bulmak için α açısı 60° ye $\alpha \rightarrow 60^\circ$ yaklaştığın-
da ABC üçgeninin alanının br^2 cinsinden hangi sayıya yaklaştığını
bulmalıyız.

Bunun için α açısı 60° olan bir ABC üçgeni çizelim ve bu üçgenin
alanını bulalım.



$$\begin{aligned} A(\widehat{ABC}) &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6\sqrt{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

Bu durumda α açısı 60° ye yaklaştığında ABC üçgeninin alanı
 $6\sqrt{3} \text{ br}^2$ ye yaklaşır. O hâlde, $\lim_{\alpha \rightarrow 60^\circ} A(\widehat{ABC}) = 6\sqrt{3}$ olarak bulunur.

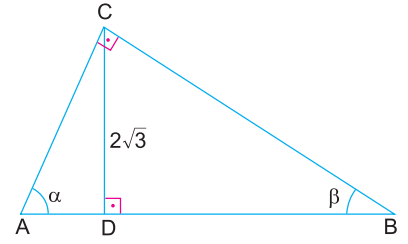
2. ABC bir üçgen

$AC \perp BC$

$|CD| = 2\sqrt{3}$ birim

$m(\widehat{CAB}) = \alpha$

$m(\widehat{CBA}) = \beta$

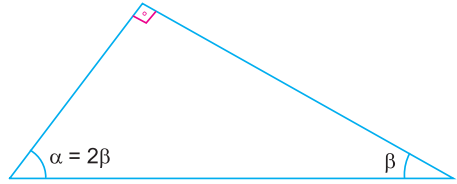


Yukarıdaki verilere göre, $\lim_{a \rightarrow 2\beta} \widehat{C(ABC)}$ limitinin değeri kaç-
tır?

Açıklamalı Çözüm:

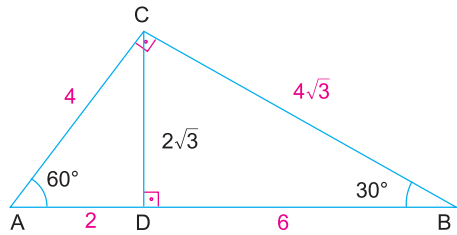
$\lim_{a \rightarrow 2\beta} \widehat{C(ABC)}$ limitinin değerini bulmak için $a \rightarrow 2\beta$ iken yani α açısı 2β
değerine yaklaşırken ABC üçgeninin çevresinin hangi sayıya yaklaştı-
ğını bulmalıyız.

α açısının ölçüsünün 2β değerine eşit olduğunu düşünerek a ve β
değerlerini bulalım.



$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ 2\beta + \beta &= 90^\circ \\ 3\beta &= 90^\circ \\ \beta &= 30^\circ \text{ ve } \alpha = 60^\circ \end{aligned}$$

Şimdi ise $a = 60^\circ$ ve $b = 30^\circ$ olarak ABC üçgeninin çevresini hesap-
layalım:

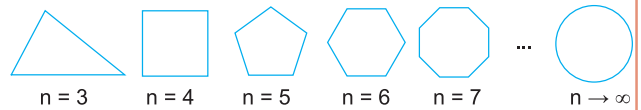


$$\widehat{C(ABC)} = 12 + 4\sqrt{3}$$

O hâlde, $\lim_{a \rightarrow 2\beta} \widehat{C(ABC)} = 12 + 4\sqrt{3}$ olarak bulunur.



NOT



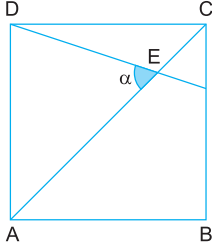
Bir düzgün n -genin kenar sayısı artırıldıkça düzgün çokgenin bir
çembere yaklaştığını görebiliriz.

TEST

13. MODEL: GEOMETRİK ŞEKİLLERDE LİMİT



1.

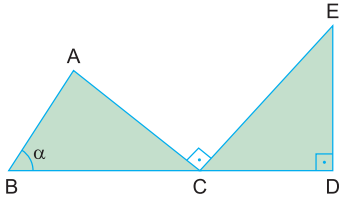


ABCD kare
 $m(\widehat{DÊA}) = \alpha$
 $\text{Çevre}(ABCD) = 64$ br
 $[AC]$ köşegen

Buna göre, $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \text{Alan}(\widehat{DÊA})$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 32 B) 48 C) 52 D) 64 E) 72

2.

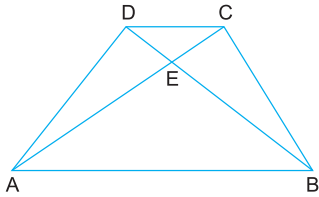


$[AC] \perp [CE]$
 $[BD] \perp [ED]$
 $2|CD| = 3|ED|$
 $|AC| = 13$ cm

Yukarıda verilenlere göre, $A(\widehat{ABC}) = A$ olmak üzere, $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} (A)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{13}{2}$ B) 13 C) 26 D) 32 E) 39

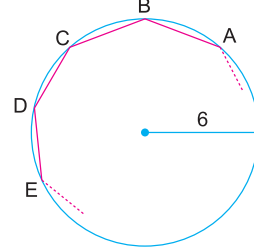
3.



ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$,
 $|AD| = |DC| = |CB|$ ve $5|DE| = 3|EB|$
 olduğuna göre, $\lim_{|AB| \rightarrow 30} \text{Ç}(ABCD)$ değeri kaçtır?

- A) 54 B) 84 C) 100 D) 120 E) 180

4.

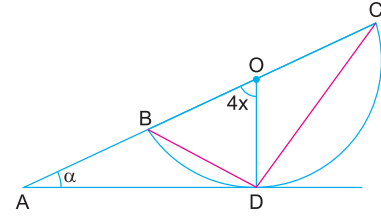


Yandaki şekilde $r = 6$ cm
 yarıçaplı daire ile
 $ABCDE\dots$ düzgün n-geni
 oluşturuluyor.

Oluşturulan n-genlerin çevresi Ç_n olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow 4} \frac{\text{Ç}_{n+2}}{\text{Ç}_n}$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$

5.

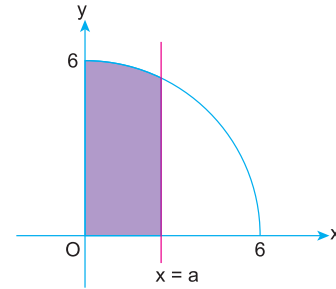


O merkezli, $[BC]$ çaplı çemberde
 $m(\widehat{CAD}) = \alpha$, $m(\widehat{AOD}) = 4x$

olduğuna göre, $\lim_{\alpha \rightarrow 2x} \frac{|DC|}{|BD| + |OC|}$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) 2 E) 1

6.



$f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ fonksiyonunun I. bölgedeki grafiği verilmiştir.
 $x = 0$ ve $x = a$ doğruları arasında kalan alan $S(x)$ olduğuna göre,
 $\lim_{x \rightarrow 3} S(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 6π B) 9π C) $6\pi + 9\sqrt{3}$
 D) $6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$ E) $3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$

1-D

2-E

3-B

4-C

5-A

6-E



UYGULAMA TESTİ 5

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 2 \text{ ise} \\ 5, & x = 2 \text{ ise} \\ x + 2, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = m$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = n$ olduğuna göre, $k + m - n$ ifadesinin değeri kaçtır?

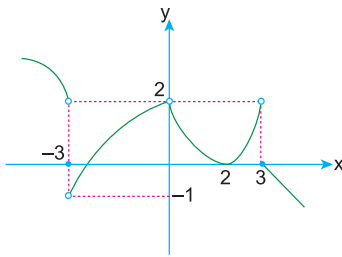
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

2. İkinci dereceden bir $P(x)$ polinomu için $P(3) = P(1) = 0$ olarak veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow -1} P(x) = 12$ olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun, sabit teriminin başkatsayısına oranı kaçtır?

- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) 3 D) $\frac{9}{2}$ E) 5

3.



Yukarıda $y = g(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = 2$ ifadesini sağlayan k değerlerinin toplamı kaçtır?

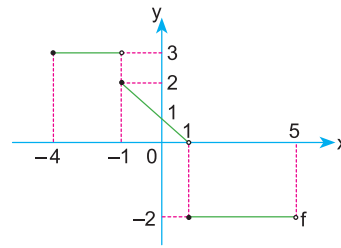
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

4. $\lim_{x \rightarrow 3} (f^2(x) - 6f(x) + 2x + 1) = -2$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ifadesinin eşiti kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

5.



$[-4, 5]$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği şekilde gösterilmiştir.

Buna göre,

$$\sum_{x_0=-4}^4 \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = k$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 8 D) 5 E) 10

6. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x - 1) + x^2 + k) = 7$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (f(4 - x) + 2x - k) = 5$$

olduğuna göre, k değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 12 E) 22

1-D

2-C

3-A

4-B

5-A

6-B



UYGULAMA TESTİ 7

1. BÖLÜM: LİMİT VE SÜREKLİLİK

1. $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{13}\right)^+} (a + \tan x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{13}\right)^-} (-b + \cot x) = 3$

olduğuna göre, a nın b cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2b+5}{b+3}$ B) $\frac{2b+7}{b+3}$ C) $\frac{2b-3}{b+3}$
D) $\frac{2b-5}{b-3}$ E) $\frac{2b-7}{b-3}$

2. Tüm x reel sayıları için,

$0 < f(x) \leq 2$

$-2 \leq g(x) < 0$

olduğuna göre,

I. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{|f(x)|}{f(x)} + \frac{g(x)}{|g(x)|} \right)$ vardır.

II. $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - g(x))$ vardır.

III. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ vardır.

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) I ve III

3. $f(x) = ax^2 + bx + 5x + c - 8$

Her x için, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = -2$

olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

4. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 3 \\ x + 2, & x < 3 \end{cases}$

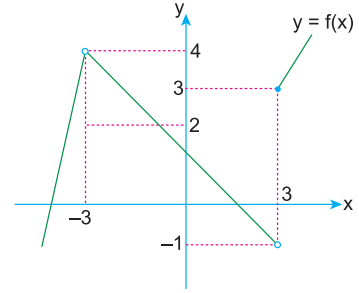
$g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 5 \\ \frac{x - 3}{2}, & x \geq 5 \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 3^+} (g \circ f)(x)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

5.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(-x)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{9x^2 - 2x}}{x|x - 2| + \sqrt[3]{27x^3}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) -1

1-A

2-A

3-C

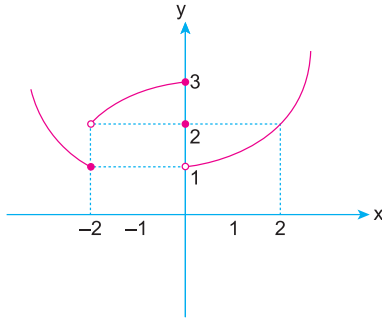
4-A

5-A

6-E



1.



Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonun grafiğine göre,

- I. $\lim_{x \rightarrow 0} f(|-x|) = 3$
- II. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(2 - x) = 2$
- III. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(2 - f(x)) = 3$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I
- B) Yalnız II
- C) Yalnız III
- D) II ve III
- E) I ve III

2. Mars'ta havaya doğru 52 m/s hızla bir ok fırlatılırsa, t saniye sonra bu okun yüksekliği $52t - 1,86t^2$ oluyor. Bu veriden yararlanarak bu okun $[1, 2]$, $[1, 1.1]$, $[1, 1.01]$, $[1, 1.001]$ aralıklarındaki ortalama hızları sırasıyla 46.42, 48.09, 48.26, 48.278 olarak hesaplanıyor.

Buna göre, aşağıdaki tahminlerden hangisi bu okun tam olarak 1 saniye sonraki hızına en yakındır?

- A) 47
- B) 48
- C) 48.27
- D) 48.28
- E) 48.3

3.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - a^2} = b$$

ifadesinde a ve b reel sayılar ise b nin değerler çarpımı kaçtır?

- A) $\frac{16}{15}$
- B) $\frac{8}{15}$
- C) $-\frac{16}{5}$
- D) $\frac{4}{15}$
- E) $-\frac{8}{15}$

4.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 2} - \frac{2x^2 + 12x + 18}{x + 3} + \frac{6}{x}$$

olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

toplamı kaçtır?

- A) -21
- B) -15
- C) -13
- D) -12
- E) -10

5. İki fonksiyonun hem toplam hem de farkı $x = a$ noktasında sürekli ise bu iki fonksiyonun,

- I. en az biri $x = a$ noktasında sürekli.
- II. $x = a$ noktasında ya ikisi de sürekli ya da ikisi de sürek-sizdir.
- III. $x = a$ noktasında ikisi de süreksizdir.

yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I
- B) Yalnız II
- C) Yalnız III
- D) I ve II
- E) I, II ve III

1-C

2-D

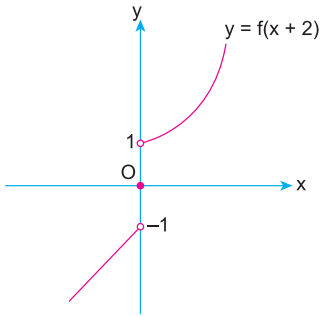
3-A

4-B

5-D

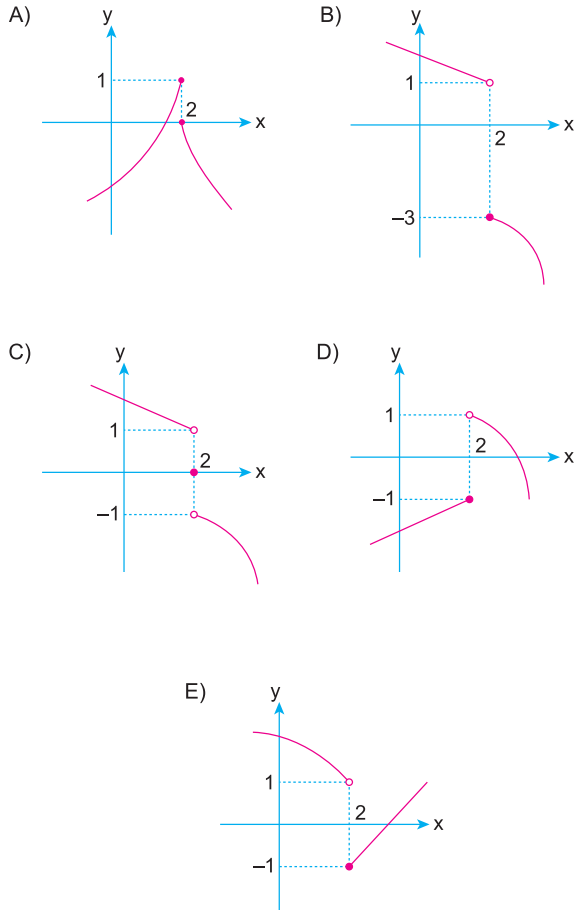


1.



Yukarıda $y = f(x+2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$(f+g)(x)$ fonksiyonu $x=2$ noktasında sürekli olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



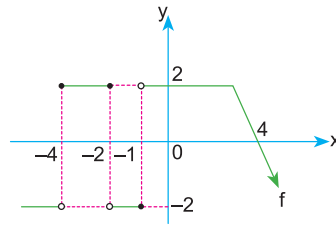
2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x - 4}, & x < 4 \\ mx + 7, & x \geq 4 \end{cases}$$

Yukarıda verilen f fonksiyonu reel sayılarda sürekli olduğuna göre, m kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

3.



Gerçel sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonunun grafiği şekilde gösterilmiştir.

Buna göre,

- I. $|f(x)|$
II. $f(|x|)$
III. $-f(x)$

fonksiyonlarından hangileri her x gerçel sayısı için süreklidir?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

4. Gerçel sayılar kümesi üzerinde bir f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

- I. f fonksiyonu $x=1$ noktasında sağdan süreklidir.
II. f fonksiyonu $x=3$ noktasında soldan süreklidir.
III. f fonksiyonu $x=3$ noktasında süreklidir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) I ve III E) I, II ve III

2. BÖLÜM: TÜREV ALMA KURALLARI

3. MODEL | TÜREV



BİLGİ

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limitine f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

- $x - a = h$ dönüşümü yapılırsa bu limit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

limitine dönüşür.

ÖRNEKLER

1. $f'(x) = x^2 + 3x$ olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8}$ limitinin değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8}$ limitinin değeri f fonksiyonunun $x = 8$ noktasındaki türevi demektir. Bize $f'(x)$ kuralı verilmiş.

O hâlde, $f'(x) = x^2 + 3x$ ifadesinde x yerine 8 yazılırsa $f'(8) = 88$ elde edilir.

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{3 - x}$ limitinin eşiti nedir?

Açıklamalı Çözüm:

Verilen limit ifadesinin paydasını $(-)$ parantezine alalım:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{-(x - 3)} = - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -f'(3)$$

3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f^2(x) - f^2(5)}{x - 5}$ limitinin eşiti nedir?

Açıklamalı Çözüm:

Limit ifadesinin pay kısmını iki kare farkı özdeşliği ile çarpanlarına ayıralım:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(f(x) - f(5)) \cdot (f(x) + f(5))}{x - 5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \cdot \lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + f(5))$$

$$\Rightarrow f'(5) \cdot (f(5) + f(5)) = f'(5) \cdot 2f(5)$$

4. $f'(x) = x^3 + a$ ve $f(-4) = 8$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - 8}{x + 4} = 5$$

olduğuna göre, a kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

$f(-4) = 8$ olarak verildiğine göre, verilen limit ifadesinde 8 yerine $f(-4)$ yazalım:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} \text{ ifadesi } f'(-4) \text{ demektir.}$$

O hâlde, $f'(-4) = 5$ tir.

$f'(x) = x^3 + a$ ifadesinde x yerine -4 yazıp sonucu 5 e eşitleyelim.

$$(-4)^3 + a = 5 \Rightarrow -64 + a = 5 \Rightarrow a = 69$$

5. I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = f'(2)$

$$\text{II. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{2h} = \frac{f'(3)}{2}$$

$$\text{III. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) - f(4 + h)}{h} = f'(4)$$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

Açıklamalı Çözüm:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ limiti $f'(a)$ ya eşit olduğuna göre, verilen ifadeleri

tek tek inceleyelim:

- I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ limiti $f'(2)$ ye eşit olduğundan **I. öncül doğrudur.**

- II. Paydadaki 2 yi limitin dışına alalım:

$$\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{f'(3)}{2}$$

olduğundan **II. öncül doğrudur.**

- III. Pay kısmını $(-)$ parantezine alalım:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(4 + h) - f(4))}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = -f'(4)$$

olduğundan **III. öncül yanlıştır.**



1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

işleminin sonucu nedir?

- A) $f'(x)$ B) $-f'(x)$ C) $f'(0)$
D) $-f'(0)$ E) $f'(1)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2 - x} = 5$

olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

- A) -5 B) -2 C) 1 D) 2 E) 5

3. Gerçek sayılarda tanımlı türevlenebilir bir f fonksiyonu için,

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f(3) = 4$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x - 3}$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 12 B) 14 C) 15 D) 17 E) 18

4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

limitinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f'(0)$ B) $f'(1)$ C) $-f'(1)$
D) $f'(-1)$ E) $-f'(-1)$

5. I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$

II. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$

III. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{h} = f'(x)$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + 2h) - f(x)}{h}$

limitinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f'(x)$ B) $2f'(x)$ C) $\frac{f'(x)}{2}$ D) $f'(0)$ E) $2f'(0)$

7. f fonksiyonu $x = 4$ noktasında türevli olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - f^2(4)}{x - 4}$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $[f'(4)]^2$ B) $2f(4)$ C) $2f'(4)$
D) $f(4) \cdot f'(4)$ E) $2f(4) \cdot f'(4)$

8. $y = f(x)$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisine eşit değildir?

- A) $f'(-3)$ B) $y'(-3)$
C) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-3}$ D) $\lim_{h \rightarrow -3} \frac{f(h - 3) - f(-3)}{h}$
E) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - 3) - f(-3)}{h}$

2. BÖLÜM: TÜREV ALMA KURALLARI

6. MODEL | ÇARPIMIN TÜREVİ (f(x) . g(x))



BİLGİ

f(x) ve g(x) türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere, f(x) . g(x) çarpımının türevi

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x)) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

şeklinde dir.

ÖRNEKLER

1. $f(x) = x^3 - x + 1$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor.
Buna göre, (f . g)'(x) fonksiyonunu bulunuz.

Açıklamalı Çözüm:

f ve g fonksiyonlarının çarpımının türevi sorulduğu için (f . g)'(x) = f'(x) . g(x) + g'(x) . f(x) şeklinde yazalım.

Bu durumda f'(x) ile g'(x) ifadelerini bulmalıyız.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1 & \text{ise} & \quad f'(x) = 3x^2 - 1 \\ g(x) &= 2x + 1 & \text{ise} & \quad g'(x) = 2 \end{aligned}$$

Şimdi çarpımın türevi açılımına devam edebiliriz:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \\ &= (3x^2 - 1) \cdot (2x + 1) + (2)(x^3 - x + 1) \\ &= 6x^3 + 3x^2 - 2x - 1 + 2x^3 - 2x + 2 \\ &= 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

2. $f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4) \cdot (x^3 + 8)$ ise f'(1) kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

f fonksiyonunun üç çarpanı olduğundan aklımıza çarpımın türevini uygulamak gelebilir.

Ancak $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğini hatırlayarak $(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$ ifadesinin yerine $x^3 - 8$ yazabiliriz.

$$f(x) = \underbrace{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}_{x^3 - 8} (x^3 + 8)$$

$$f(x) = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ özdeşliğini kullanarak $(x^3 - 8)(x^3 + 8)$ ifadesinin yerine $(x^3)^2 - 8^2$ yazalım:

$$f(x) = (x^3)^2 - (8)^2$$

$$f(x) = x^6 - 64$$

Şimdi f(x) in türevini alıp x yerine 1 yazalım:

$$f'(x) = 6 \cdot x^5 \Rightarrow f'(1) = 6$$

3. $f(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$ fonksiyonu için f'(x) ifadesinin eşiti nedir?

Açıklamalı Çözüm:

Çarpımının türevi mantığı ile $y = f \cdot g \cdot h$ ifadesinin türevini

$$y' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

şeklinde düşünelim.

Bu durumda, $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ fonksiyonunun türevini aşağıdaki gibi yazalım.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + 1)' \cdot (x + 2)(x + 3) + (x + 1)(x + 2)' \cdot (x + 3) + (x + 1)(x + 2)(x + 3)' \\ &= 1 \cdot (x + 2)(x + 3) + (x + 1) \cdot 1 \cdot (x + 3) + (x + 1)(x + 2) \cdot 1 \\ &= x^2 + 5x + 6 + x^2 + 4x + 3 + x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$$

4. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$ fonksiyonu için f'(4) kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

f fonksiyonunun türevini pratik yoldan bulmak için bir düzenleme yapalım:

$(x - 4)$ çarpanı dışında tüm çarpanların hepsine birden g(x) diyelim:

$$f(x) = (x - 4) \cdot \underbrace{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)}_{g(x)}$$

Bu durumda, $f(x) = (x - 4) \cdot g(x)$ olur. Şimdi çarpımın türevi kuralını uygulayalım:

$$f'(x) = (x - 4)' \cdot g(x) + g'(x) \cdot (x - 4)$$

$$f'(x) = 1 \cdot g(x) + g'(x) \cdot (x - 4)$$

$$f'(x) = g(x) + g'(x) \cdot (x - 4)$$

x yerine 4 yazdığımızda $f'(4) = g(4)$ olur.

Bu durumda g(x) fonksiyonunda x yerine 4 yazdığımızda f'(4) değerini bulmuş oluruz.

$$g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)$$

$$g(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$g(4) = -6$$

O hâlde, $f'(4) = -6$ bulunur.

TEST

6. MODEL: ÇARPIMIN TÜREVİ $(f(x) \cdot g(x))$



02A40445

1. $f(x) = (g \cdot h)(x)$
 $g'(3) \cdot h(3) + h'(3) \cdot g(3) = 6$
olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ değeri kaçtır?
A) 1 B) 3 C) 6 D) 12 E) 18
2. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?
A) -6 B) -3 C) 2 D) 3 E) 6
3. $f'(x) \cdot g(x) + 3x^2 + f(x) \cdot g'(x)$
fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin türevi-
dir?
A) $f(x) \cdot g(x)$ B) $f(x) \cdot g(x) + 3x^2$ C) $f(x) \cdot g(x) + x^4$
D) $f(x) \cdot g(x) + x^3$ E) $f(x) \cdot g(x) + \frac{x^3}{3}$
4. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$
olmak üzere, $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 128

5. $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = x^3 - 3x$
olduğuna göre,
 $(f \cdot g)'(4)$
ifadesinin değeri kaçtır?
A) 0 B) 45 C) 48 D) 52 E) 64
6. $h(x) = (f \cdot g)(x)$
fonksiyonu veriliyor.
 $f'(3) \cdot g(3) + g'(3) \cdot f(3) = 12$
olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$ ifadesinin eşiti kaçtır?
A) 3 B) 9 C) 12 D) 24 E) 36
7. $f(x) = (x^2 - 4) \cdot g(x)$
fonksiyonu veriliyor.
 $g(2) = 6$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 24
8. $\frac{f(x)}{x^2 - 3} = g(x)$
 $f'(2) = 3$ ve $g(2) = 5$
olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ ifadesinin eşiti nedir?
A) -17 B) -8 C) 16 D) 20 E) 23

1-C

2-C

3-D

4-A

5-D

6-C

7-E

8-A



1. I. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ azalarak sıfıra yaklaşır.

II. 3,9; 3,99; 3,999; ... artarak 4'e yaklaşır.

III. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ artarak 1'e yaklaşır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız II B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

2. x sayısı artan değerler alarak -3 sayısına yaklaşıyorsa aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $x \rightarrow (-3)^-$

II. $x \rightarrow (-3)^+$

III. $x \rightarrow (-2)^-$

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) II ve III

3. $a \rightarrow (-4)^-$ ve $b \rightarrow 6^-$ olduğuna göre, a ve b aşağıdakilerden hangisi olabilir?

	a	b
A)	-3,999	5,999
B)	-4,001	6,001
C)	-4,001	6,999
D)	-4,001	5,999
E)	-3,999	6,001

4. $m = 7 - 2n^2$ olmak üzere, $n \rightarrow 2^+$ iken m için aşağıdakilerden hangisi doğru olur?

- A) -1^+ B) -1^- C) 1^+ D) 1^- E) 2^+

5. $A = 3^4 - a$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) a değeri artan değerler aldığı anda A küçülür.
B) a değeri azalan değerler aldığı anda A büyür.
C) $a \rightarrow 2^-$ için $A \rightarrow 9^+$ olur.
D) $a \rightarrow -1^+$ için $A \rightarrow 243^-$ olur.
E) $a \rightarrow 3^-$ için $A \rightarrow 3^-$ olur.

6. a^+ : a dan çok az büyük değer
 a^- : a dan çok az küçük değer

olmak üzere,

I. $3 - 3^+ = 0^-$

II. $-5 - (-5^-) = 0^+$

III. $(2^-)^2 = 4^-$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

7.

x	-2, 5	-2, 8	-2, 90	-2, 99	-2, 999	...
---	-------	-------	--------	--------	---------	-----

Yukarıdaki tabloda x değişkeninin bazı değerleri verilmiştir.

Buna göre, x değişkeni hangi sayıya yaklaşmaktadır?

- A) $x \rightarrow (-2)^+$ B) $x \rightarrow (-2)^-$ C) $x \rightarrow (-3)^+$
D) $x \rightarrow (-3)^-$ E) $x \rightarrow (-2)$

8. $f(x) = 3x$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $x \rightarrow 2^-$ iken $f(x) \rightarrow 6^-$

II. $x \rightarrow 3^+$ iken $f(x) \rightarrow 9^+$

III. $x \rightarrow (-2)^-$ iken $f(x) \rightarrow (-6)^+$

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

2. BÖLÜM: TÜREV ALMA KURALLARI

8. MODEL | BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ [(fog)(x)]



BİLGİ

İki Fonksiyonun Bileşkesinin Türevi:

$$(fog)'(x) = f'[\underbrace{g(x)}_{\text{içi}}] \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{içinin türevi}}$$

ÖRNEKLER

1. $f(x) = x^3 - 6x$ ve $g(x) = \frac{x^3}{3}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, (fog)'(2) değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

(fog)(x) fonksiyonunun türevi için

$$(fog)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

eşitliğini yazalım. (fog)'(2) değerini bulmak için x yerine 2 yazalım.

$$(fog)'(2) = f'[g(2)] \cdot g'(2) \quad \star$$

f ve g fonksiyonlarının türevlerini alalım:

- $f(x) = x^3 - 6x$ ise $f'(x) = 3x^2 - 6$ olur.
- $g(x) = \frac{x^3}{3}$ ise $g'(x) = x^2$ olur.

$$g(2) = \frac{8}{3}, \quad f'\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{46}{3} \quad \text{ve} \quad g'(2) = 4$$

değerlerini $\star$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$(fog)'(2) = f'[g(2)] \cdot g'(2)$$

$$= f'\left[\frac{8}{3}\right] \cdot g'(2)$$

$$= \frac{46}{3} \cdot 4 = \frac{184}{3}$$

O hâlde, (fog)'(2) = $\frac{184}{3}$ olarak bulunur.

2. $f(3) = 5$ ve $g(2) = g'(2) = 3$ olduğuna göre,

$$(fog)'(2) + [(fog)(2)]'$$

toplamının sonucu kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

(fog)'(2) ile [(fog)(2)]' birbirinden farklı ifadelerdir. [(fog)(2)]' ifadesi (fog)(2) değerinin türevi iken (fog)'(2) ifadesi ise (fog) bileşke fonksiyonunun türevinde x yerine 2 yazılacak demektir.

(fog)(2) ifadesi sabit bir sayıya eşit olacağı için [(fog)(2)]' = 0 olur (sabitin türevi sıfırdır). Fakat (fog)'(2) = f'(g(2)) . g'(2) olarak yazılır.

$$(fog)'(2) = f'[g(2)] \cdot g'(2)$$

$$= f'(3) \cdot g'(3)$$

$$= 5 \cdot 3 = 15$$

O hâlde, (fog)'(2) + [(fog)(2)]' işleminin sonucu 15 + 0 = 15 olacaktır.



BİLGİ

f(2x), f(5x + 1), f(x²) ... gibi fonksiyonların türevi alınırken bileşke fonksiyon gibi düşünülerek içinin türevini almayı unutmamalıyız.

- f(2x) fonksiyonunun türevi f'(2x) . 2 olur.
- f(5x + 1) fonksiyonunun türevi f'(5x + 1) . 5 olur.
- f(x²) fonksiyonunun türevi f'(x²) . 2x olur.

ÖRNEKLER

1. $f(4x - 1) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

fonksiyonu için f'(7) değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

f(4x - 1) fonksiyonunun türevini alırken içinin türevini almayı unutmamalıyız. Şimdi verilen eşitliğin her iki tarafının türevini alalım:

$$f'(4x - 1) \cdot 4 = 3x^2 + 8x + 4$$

f'(7) değerini bulmak için 4x - 1 = 7 eşitliği ile x yerine hangi sayıyı yazmamız gerektiğini bulalım.

$$4x - 1 = 7 \Rightarrow x = 2$$

O hâlde, x yerine 2 yazalım:

$$f'(7) \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 4$$

$$f'(7) \cdot 4 = 32 \Rightarrow f'(7) = 8$$

2. $x < -1$ olmak üzere, her x gerçel sayısı için türevlenebilir bir f fonksiyonu

$$f(x^2 - 2x) = 2x^3 - 4x + 5$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f'(8) değeri kaçtır?

Açıklamalı Çözüm:

Verilen eşitliğin her iki tarafının türevini alalım:

$$f'(x^2 - 2x) \cdot (2x - 2) = 6x^2 - 4$$

f'(8) değerini bulmak için x² - 2x ifadesini 8 e eşitleyerek x yerine hangi sayıyı yazmamız gerektiğini bulalım.

$$x^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 4 \quad \text{ve} \quad x_2 = -2$$

f fonksiyonu $x < -1$ için tanımlı olduğundan x yerine -2 yazmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$f'(8) \cdot (2(-2) - 2) = 6 \cdot (-2)^2 - 4$$

$$f'(8) \cdot (-6) = 20$$

$$f'(8) = -\frac{10}{3}$$

TEST

8. MODEL: BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ [(fog)(x)]



02DA03A9

1. $f(2x - 3) = x^2 + 2x - 6$
olduğuna göre, $f'(5)$ kaçtır?

A) 24 B) 18 C) 16 D) 10 E) 5

2. $f(x) = x^2 - 4$
 $g(x) = 3x - 2$
olduğuna göre, $(fog)'(x)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $18x - 6$ B) $18x - 12$ C) $6x - 6$
D) $12x - 6$ E) $12x - 12$

3. $f(x) = x^2 + x$
 $g(x) = x^2 + 2$
olduğuna göre, $(fog)'(2)$ kaçtır?

A) 13 B) 32 C) 42 D) 48 E) 52

4. f ve g gerçekte sayılarda türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,
 $f'(4) = 3$, $g'(3) = 6$ ve $g(3) = 4$
olduğuna göre, $(fog)'(3)$ kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 18 E) 24

5. f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,
 $(fog)(x) = 3x^2$
 $g(3) = 6$
 $g'(3) = 2$
olduğuna göre, $f'(6)$ kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

6. $f(x) = (2x) \cdot g(2x - 3)$
 $f'(3) = g'(3) = 2$
olduğuna göre, $g(3)$ kaçtır?

A) -24 B) -22 C) -11 D) -5 E) -2

7. $h(x) = (gof)(x)$
 $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$ ve $g'(4) = 6$
olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24

8. Gerçek sayılarda tanımlı ve türevlenebilen f ve g fonksiyonları için,

$$f(3x - 2) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$g(x + 2) = 4x + 3$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $(fog)'(1)$ değeri kaçtır?

A) $-\frac{8}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) -3 E) -8

1-E

2-B

3-E

4-D

5-C

6-C

7-D

8-A



UYGULAMA TESTİ 7

2. BÖLÜM: TÜREV ALMA KURALLARI

1. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 - 6$
olduğuna göre, $(f^{-1})'(-2)$ kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

2. $f(x^3 - 5) = (x^2 + 3) \cdot (x^2 + 4)$
olduğuna göre, $f'(3)$ kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 15 D) 56 E) 60

3. $f(x) = x^3 + 6x + 3$
olduğuna göre, $(f^{-1})'(10)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 0 D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{9}$

4. Bir demir - çelik fabrikasındaki bazı makineler, kanalizasyon çukurlarının kapatılması için kare şeklindeki demir kapaklar üretiyor. Bu makineler her saniyede kapağın alanı yine kare olacak şekilde kapağın yüzey alanını 24 cm^2 büyütüyor. Buna göre, kare kapağın alanı 48 cm^2 olduğunda çevre uzunluğunun büyüme hızı kaç cm/sn dir?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3 D) 4 E) $4\sqrt{3}$

5. $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^4 + \frac{1}{x^4}$
olduğuna göre, $f'(x)$ ifadesinin eşiti nedir?

A) $8x^3 - 4x$ B) $4x^3 - 8x$ C) $4x^2 - 2x^3$
D) $12x^2 + \frac{1}{12x^2}$ E) $4x^3 - 4x^2$

6. $g(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$

şeklinde $g(x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. g fonksiyonu $x = 0$ da süreklidir.

II. $g'(0) = 0$ dır.

III. $g'(\sqrt{2}) = 0$ dır.

IV. $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ dir.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) I, II ve III
D) I, III ve IV E) Hepsi

1-B

2-B

3-A

4-E

5-B

6-A